Sur une inégalité de la théorie des fonctions

Par S. SAKS à Varsovie.

(Extrait d'une lettre à M. Tibor Radó).

...... Je me permets de vous communiquer les détails de la démonstration d'une inégalité se rattachant à la généralisation d'un résultat de LINDELÖF que vous avez donnée dans votre travail sur le prolongement des surfaces de RIEMANN.[1]) Je commence par établir deux propositions relatives aux fonctions subharmoniques[2]) et valables pour un nombre quelconque de variables. De ces deux propositions, je déduis une troisième, valable seulement pour le cas de deux variables, et qui correspond précisément à votre résultat mentionné plus haut.

1. Pour fixer les idées, je considère le cas de deux variables. Soient G un domaine (c'est-à-dire un ensemble ouvert) compris dans le cercle-unité K, C la circonférence de K, E l'ensemble des points communs à C et à la frontière de G. Soit de plus $u(\mathfrak{p})$ une fonction sous-harmonique dans G et A sa borne supérieure dans ce domaine.

Théorème. *Si $A < +\infty$ et si en tout point frontière* $\mathfrak{q}$ *de G intérieur à K*

$$\overline{\lim_{\mathfrak{p}\to\mathfrak{q}}}\, u(\mathfrak{p}) \leqq a \leqq A, \tag{1}$$

---

[1]) T. RADÓ, Über eine nicht fortsetzbare RIEMANNsche Mannigfaltigkeit, *Math. Zeitschrift* **20** (1924), S. 1—6; *voir* aussi T. RADÓ, Zu einem Satze von S. BERNSTEIN über Minimalflächen im Grossen, *Math. Zeitschrift* **26** (1927), S. 559—565.

[2]) Pour la définition, *voir* F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques etc., *Acta Mathematica* **48** (1926), pp. 329—343.

alors on aura, en tout point $\mathfrak{p} = re^{i\theta}$ *de* G,

$$u(re^{i\theta}) \leqq \frac{a}{2\pi}\int_{C-E} P(r, \lambda-\theta)\, d\lambda + \frac{A}{2\pi}\int_{E} P(r, \lambda-\theta)\, d\lambda, \qquad (2)$$

où

$$P(r, \lambda-\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\lambda-\theta)+r^2}$$

En particulier, si le point $\mathfrak{p} = 0$ *appartient à* G,

$$u(0) \leqq \frac{a}{2\pi}\operatorname{mes}(C-E) + \frac{A}{2\pi}\operatorname{mes} E.$$ [3]

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. E étant un ensemble fermé, on peut l'enfermer dans un ensemble D composé d'un nombre fini d'arcs ouverts de C et tel que

$$\operatorname{mes}(D-E) < \varepsilon.$$

Posons, en tout point $\mathfrak{p} = re^{i\theta}$ intérieur à K,

$$U(\mathfrak{p}) = U(re^{i\theta}) = \frac{a}{2\pi}\int_{C-D} P(r, \lambda-\theta)\, d\lambda + \frac{A}{2\pi}\int_{D} P(r, \lambda-\theta)\, d\lambda.$$

La fonction $U(\mathfrak{p})$ ainsi définie est harmonique, et en vertu des propriétés connues de l'intégrale de Poisson, elle satisfait en tout point $\mathfrak{q}$ de D à la relation

$$\lim_{\mathfrak{p}\to\mathfrak{q}} U(\mathfrak{p}) = A.$$

D'autre part, en vertu de l'inégalité $a \leqq A$, $U(\mathfrak{p})$ vérifie, à l'intérieur de K, l'inégalité

$$U(\mathfrak{p}) \geqq \frac{a}{2\pi}\int_{C} P(r, \lambda-\theta)\, d\lambda = a.$$

On a donc en tout point frontière $\mathfrak{q}$ de G

$$\overline{\lim_{\mathfrak{p}\to\mathfrak{q}}}\, u(\mathfrak{p}) \leqq \lim_{\mathfrak{p}\to\mathfrak{q}} U(\mathfrak{p}).$$

$U(\mathfrak{p})$ étant une fonction harmonique et $u(\mathfrak{p})$ une fonction sous-harmonique, il en résulte, pour tout point $\mathfrak{p}$ de G, $u(\mathfrak{p}) \leqq U(\mathfrak{p})$, c'est-à-dire que

---

[3]) Cet énoncé n'exige que des modifications formelles pour le cas de plusieurs variables.

$$u(\mathfrak{p}) \leqq \frac{a}{2\pi} \int\limits_{C-D} P(r, \lambda - \theta)\, d\lambda + \frac{A}{2\pi} \int\limits_{D} P(r, \lambda - \theta)\, d\lambda.$$

Pour $\varepsilon \to 0$, cette inégalité se réduit à la relation (2) qu'il s'agissait de démontrer.

Corollaire 1. *Lorsque la circonférence C n'est pas contenue toute entière dans la frontière de G, la relation*

$$\lim_{\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}} u(\mathfrak{p}) = -\infty \tag{3}$$

ne saurait avoir lieu en tout point frontière $\mathfrak{q}$ de G intérieur à K, sans que l'on ait $u(\mathfrak{p}) = -\infty$ dans tout le domaine G.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}_0$ un point quelconque de G. Désignons par K' un cercle concentrique et intérieur à K, par C' la circonférence de K' et par G' la partie de G contenue dans l'intérieur de K'; enfin, E' désignera l'ensemble des points communs à C' et à la frontière de G'. La fonction $u(\mathfrak{p})$ est évidemment bornée supérieurement dans G'. D'autre part, si la circonférence C' est assez voisine de C, le point $\mathfrak{p}_0$ sera compris dans G' et, de plus, l'ensemble $C' - E'$ ne sera pas vide. On sera alors en droit d'appliquer à G' et K' la formule (2) avec $a = -\infty$, ce qui fournit $u(\mathfrak{p}_0) = -\infty$.

2. Tandis que notre théorème et le corollaire 1 s'appliquent à un nombre quelconque de variables, il n'en sera pas de même pour le corollaire qui suit.

Corollaire 2. *Si G est simplement connexe et ne coïncide pas avec l'intérieur de K, la relation* (3) *ne saurait avoir lieu en tout point frontière $\mathfrak{q}$ de G intérieur à K, sans que l'on ait $u(\mathfrak{p}) = -\infty$ partout dans G.*

Pour le montrer, on reprendra l'artifice que vous avez employé l. c. [1]) et sur lequel vous avez bien voulu attirer mon attention dans votre dernière lettre. En supposant (ce qui est toujours admissible) que le point $r = 0$ appartienne à la frontière de G, on appliquera au domaine simplement connexe G la transformation $z' = \sqrt{z}$; le domaine G' obtenu par cette transformation vérifie alors les hypothèses du corollaire précédent.

Observons que la transformation $z' = \sqrt{z}$ joue un rôle essentiel dans ce raisonnement. En effet, le corollaire 2 n'est plus valable dans l'espace, comme on voit immédiatement sur l'exemple suivant. Soient K la sphère-unité et G le domaine formé des points intérieurs à cette sphère, exceptés ceux du segment $0 \leqq x \leqq 1$ de l'axe des x. Posons

$$u(x, y, z) = -\int_0^1 \frac{ds}{r}, \quad \text{où} \quad r^2 = (x-s)^2 + y^2 + z^2.$$

La fonction $u(x, y, z)$, ainsi définie, est harmonique dans tout le domaine G, tandis qu'elle tend vers $-\infty$ en tout point du segment en question, c'est-à-dire en tout point frontière de G intérieur à K.

3. En considérant la fonction sous-harmonique $\log |f(z)|$, où $f(z)$ désigne une fonction holomorphe dans G, on tire des propositions précédentes des énoncés relatifs aux fonctions analytiques. Ainsi, le corollaire 2 conduit immédiatement au lemme de votre travail cité au début: *G étant un domaine simplement connexe compris dans le cercle-unité K, qui ne coïncide pas avec l'intérieur de K, et $f(z)$ une fonction holomorphe dans G qui s'annulle en tout point frontière de G intérieur à K, on a $f(z) \equiv 0$.* Quant au théorème du n° **1** de cette lettre, on en déduit de suite l'énoncé suivant:

Théorème. *Soient G un domaine compris dans le cercle-unité K, C la circonférence de ce cercle, E l'ensemble des points communs à C et à la frontière de G, et $f(z)$ une fonction holomorphe dans G.*

Si $|f(z)| \leqq A < +\infty$ dans tout le domaine G, et si $\overline{\lim\limits_{z \to t}} |f(z)| \leqq a \leqq A$ en tout point frontière t de G intérieur à K, on aura en tout point $z = re^{i\theta}$ de G

$$|f(z)| \leqq a^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C-E} P(r, \lambda-\theta)\, d\lambda} \cdot A^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E} P(r, \lambda-\theta)\, d\lambda}$$

où

$$P(r, \lambda-\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\lambda-\theta)+r^2}.$$

En particulier, si le point $z = 0$ appartient à G, on aura

$$|f(0)| \leqq a^{\frac{1}{2\pi}\operatorname{mes}(C-E)} \cdot A^{\frac{1}{2\pi}\operatorname{mes} E}$$

D'ailleurs, cet énoncé n'est pas nouveau. Pour le cas où G est limité par une courbe simple n'admettant qu'un nombre fini d'arcs communs avec la circonférence C, ce théorème est démontré dans le recueil de problèmes de MM. Pólya et Szegö.[1]) Cependant, la démonstration de ces auteurs s'appuie sur la théorie de la représentation conforme et l'extension de cette démonstration au cas d'un domaine à frontière absolument générale semble nécessiter des considérations assez délicates. Ce n'est donc qu'à cause de la simplicité de la méthode que je viens d'exposer que je me suis permis de vous entretenir de ces détails.

Varsovie, le 1 mai 1928.

(*Reçu le 5 mai 1928*)

[1]) Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II (Berlin, J. Springer, 1925), IV. Abschnitt, Aufgabe 134. S. 23.