Sur la convergence en moyenne.

Par FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

1. Considérons la classe L^p, où $p>1$, des fonctions $f(x)$ définies sur un ensemble mesurable E et sommables sur cet ensemble ainsi que la p-ième puissance de leur module. Quant à la convergence des suites $\{f_n\}$ de telles fonctions, on distingue, outre la convergence effective, c'est-à-dire convergence point par point et partout ou presque partout, deux autres types de convergence, ne dépendant que des intégrales et dont l'idée s'est montrée très féconde pour l'étude des classes L^p. Ce sont la convergence *en moyenne,* dite aussi convergence *forte,* et la convergence *faible.* On dit que la suite $\{f_n\}$ converge en moyenne (d'ordre p) vers la fonction limite f lorsque, f et les f_n appartenant à la classe L^p, on a, pour n infini,

$$\int_E |f-f_n|^p\,dx \to 0. \tag{1}$$

De cette hypothèse, et en se servant des inégalités bien connues qui s'attachent aux noms de CAUCHY, SCHWARZ, HÖLDER et MINKOWSKI, on déduit immédiatement que la suite $\{f_n\}$ jouit des propriétés suivantes:

a) on a, pour toute fonction g appartenant à la classe $L^{p/p-1}$:

$$\int_E f_n g\,dx \to \int_E fg\,dx$$

b) on a

$$\int_E |f_n|^p\,dx \to \int_E |f|^p\,dx.$$

Passons à la convergence faible. La convergence faible (d'ordre p) peut être caractérisée par l'hypothèse *a),* sans exiger la propriété *b).* Donc les suites convergentes en moyenne convergent aussi faiblement; mais la convergence faible est plus générale que la convergence en moyenne. Ainsi par exemple, la suite des fonctions $f_n(x) = \sin nx$ et la fonction $f(x) = 0$ satisfont à l'hypothèse *a)* c'est-à-dire que la suite converge faiblement vers zéro sur tout intervalle fini et de tout ordre p, tandis que la relation *b)* est évidemment en défaut.

Dans la note présente, nous nous proposons de montrer que la relation *b)* est justement caractéristique pour la convergence en moyenne; d'une façon précise, nous allons montrer que *toute suite* $\{f_n\}$ *convergeant faiblement (d'ordre p) vers une fonction limite f et satisfaisant de plus à la relation b), converge aussi en moyenne (d'ordre p) vers la même fonction f.* En d'autres termes, l'ensemble des relations *a)* et *b)* est équivalent à la relation (1).

2. Voyons d'abord, à titre d'exemple, le cas particulier où $p = 2$. Dans ce cas, on a

$$\int_E |f-f_n|^2 dx = \int_E |f|^2 dx - \int_E \bar{f} f_n dx - \int_E f \bar{f}_n dx + \int_E |f_n|^2 dx.$$

D'après l'hypothèse *a)*, la seconde intégrale figurant au second membre tend, pour n infini, vers $\int |f|^2 dx$, c'est-à-dire vers la première et il en sera de même quant à la troisième intégrale dont les valeurs sont conjuguées à celles de la seconde; enfin, la quatrième des intégrales figurant au second membre converge aussi vers la première et cela par l'hypothèse *b)*. En résumé, on obtient

$$\int_E |f-f_n|^2 dx \to 0,$$

c. q. f. d.

3. Le cas général d'un $p > 1$ quelconque exige une analyse plus délicate. Commençons par démontrer le lemme suivant:

Lorsque, f et les f_n appartenant à la classe L^p, les f_n convergent vers f presque partout sur E et que, de plus,

$$(2) \qquad \int_E |f_n|^p dx \to \int_E |f|^p dx,$$

on aura aussi

$$(1) \qquad \int_E |f-f_n|^p dx \to 0.$$

Brièvement, la convergence effective et l'hypothèse *b)* entraînent la convergence en moyenne. Pour le voir, désignons par f_n^* la fonction égale à f_n partout où $|f_n| \leqq |f|$ et égale à

$$|f|\,\mathrm{sgn}\, f_n = f_n \left| \frac{f}{f_n} \right|$$ [1])

ailleurs. La suite des fonctions f_n^* tend presque partout vers la fonction f et reste, en module, au-dessous de cette fonction ; il s'ensuit, d'après le théorème de M. Lebesgue, que

$$\int_E |f_n^*|^p\, dx \to \int_E |f|^p\, dx \tag{3}$$

et que

$$\int_E |f - f_n^*|^p\, dx \to 0. \tag{4}$$

De plus, par la définition des f_n^*, on a

$$|f_n - f_n^*| = |f_n| - |f_n^*|$$

et par conséquent

$$|f_n - f_n^*|^p \leqq |f_n|^p - |f_n^*|^p,$$

ce qui donne, en tenant compte des relations (2) et (3),

$$\int_E |f_n - f_n^*|^p\, dx \leqq \int_E |f_n|^p\, dx - \int_E |f_n^*|^p\, dx \to 0.$$

Enfin, en comparant les relations (4) et (5) et en appliquant l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\int_E |f - f_n|^p\, dx \leqq \left\{ \left[\int_E |f - f_n^*|^p\, dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |f_n - f_n^*|^p\, dx \right]^{\frac{1}{p}} \right\}^p \to 0,$$

c. q. f. d.

4. Ces préliminaires établis, nous sommes à même de démontrer notre théorème général.

Lorsque la suite $\{f_n\}$ *converge faiblement d'ordre* p *vers la fonction* f *et que, de plus,*

$$\int_E |f_n|^p\, dx \to \int_E |f|^p\, dx,$$

alors la suite $\{f_n\}$ *converge aussi en moyenne et du même ordre* p *vers la même fonction* f.

Pour démontrer ce théorème, observons tout d'abord que le cas où

$$\int_E |f|^p\, dx = 0,$$

[1]) Nous convenons de poser $\mathrm{sgn}\, z = \frac{z}{|z|}$ lorsque $z \neq 0$ et $\mathrm{sgn}\, 0 = 0$.

est évident. Dans tout autre cas, on pourra supposer, par raison d'homogénéité, que

$$(6) \qquad \int_E |f|^p dx = 1 \,; \int_E |f_n|^p dx \to 1.$$

Cela étant, posons

$$g_n = f_n |f|^{p-1} \operatorname{sgn} \bar{f}.$$

La fonction $|f|^{p-1} \operatorname{sgn} \bar{f}$ appartenant à la classe $L^{p/p-1}$, on aura, d'après l'hypothèse *a)*,

$$(7) \qquad \int_E g_n dx \to \int_E f |f|^{p-1} \operatorname{sgn} \bar{f} dx = \int_E |f|^p dx = 1.$$

D'autre part, l'inégalité Schwarz-Hölder donne

$$(8) \qquad \left|\int_E g_n dx\right| \leqq \int_E |g_n| dx =$$

$$= \int_E |f_n| |f|^{p-1} dx \leqq \left[\int_E |f_n|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_E |f|^p dx\right]^{\frac{p}{p-1}} \to 1.$$

En comparant (7) à (8), il vient que

$$(9) \qquad \int_E |g_n| dx \to 1.$$

Envisageons maintenant l'intégrale

$$(10) \qquad I_n(t) = \int_E |f|^{pt} |f_n|^{p(1-t)} dx,$$

dépendant du paramètre t variant sur l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. Les formules (6) et (9) nous affirment que

$$I_n(1) = 1, \; I_n(0) \to 1, \; I_n\left(\frac{p-1}{p}\right) \to 1.$$

D'autre part, d'après l'inégalité Schwarz-Hölder, $\log I_n(t)$ est une fonction convexe de t. Cette fonction allant, pour n infini et pour $t = 0, \frac{p-1}{p}$, 1, c'est-à-dire pour trois valeurs différentes de t, vers la même limite $= 0$, il en sera de même pour toutes les autres valeurs de t et en particulier pour $t = {}^1/_2$. C'est-à-dire que

$$\int_E |f|^{1/2 p} |f_n|^{1/2 p} \to 1$$

et que, par conséquent,

$$\int_E (|f|^{1/2p} - |f_n|^{1/2p})^2\,dx = \int_E |f|^p\,dx - 2\int_E |f|^{1/2p}|f_n|^{1/2p}dx + \int_E |f_n|^p\,dx \to 0.$$

Cela nous dit que la suite des fonctions $|f_n|^{1/2p}$ converge en moyenne (d'ordre 2) vers la fonction $|f|^{1/2p}$. Il s'ensuit, d'après un théorème connu,[2]) qu'il existe une suite partielle tendant point par point, presque partout, vers la fonction $|f|^{1/2p}$ ou ce qui revient au même, les fonctions $|f_n|$ tendent, après un choix convenable des indices n et presque partout, vers la fonction $|f|$. Pour la suite choisie, on aura donc presque partout,

$$|g_n| = |f_n|\,|f|^{p-1} \to |f|^p. \tag{11}$$

Voilà que, par un choix convenable des indices, nous sommes arrivés à remplacer la convergence faible par une convergence effective des modules $|f_n|$. Il s'agira dès maintenant de nous assurer, par un nouveau choix d'indices, de la convergence effective des fonctions f_n elles-mêmes.

Dans ce but, écrivons

$$g_n = \gamma_n^2 = (\varphi_n + i\psi_n)^2 = \varphi_n^2 - \psi_n^2 + 2i\varphi_n\psi_n,$$

où nous avons choisi pour γ_n une détermination mesurable de la racine carré de g_n et mis en évidence les parties réelle et imaginaire de γ_n.

En rappelant les formules (7) et (9) on reconnaît que

$$\int_E (\varphi_n^2 - \psi_n^2)\,dx = \int_E \Re(g_n)\,dx \to 1\,;\int_E (\varphi_n^2 + \psi_n^2)\,dx = \int_E |g_n|\,dx \to 1$$

et que, par conséquent,

$$\int_E \psi_n^2 dx \to 0.$$

On pourra donc obtenir, par un second choix convenable, que les ψ_n convergent vers zéro presque partout. Ce choix fait, on aura, presque partout,

$$|g_n| - \Re(g_n) = 2\psi_n^2 \to 0\,;$$

il s'ensuit, par la formule (11), que l'on a presque partout,

$$g_n \to |f|^p$$

---

[2]) B. Levi, Sul principio di Dirichlet, *Rendiconti di Palermo*, **22** (1906), pp. 293—360; F. Riesz, Sur les suites de fonctions mesurables, *Comptes rendus*, Paris, **148** (1909), pp. 1303—1305; H. Weyl, Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, *Math. Annalen*, **67** (1909), pp. 225—245.

et de là il vient, par la définition de g_n, que l'on a presque partout

$$f_n \to f.$$

Donc, en appliquant le lemme établi au n° **3**, on conclut que l'on a, pour notre suite partielle,

$$\int_E |f-f_n|^p\, dx \to 0.$$

C'est-à-dire que, de toute suite $\{f_n\}$ satisfaisant aux hypothèses *a)* et *b)*, on peut extraire une suite partielle convergeant en moyenne (d'ordre p) vers la fonction f.

Supposons maintenant, par impossible, que la suite $\{f_n\}$, tout en satisfaisant aux hypothèses *a)* et *b)*, ne converge pas en moyenne (d'ordre p) vers la fonction f, c'est-à-dire que l'on ait

$$\overline{\lim} \int_E |f-f_n|^p\, dx = \lambda > 0.$$

Cela posé, il existera une suite partielle des f_n, telle que

$$\int_E |f-f_n|^p\, dx > \frac{\lambda}{2};$$

d'autre part, cette suite partielle satisfaisant, à plus forte raison, aux hypothèses *a)* et *b)*, elle devrait contenir, d'après ce que nous venons de voir, une nouvelle suite telle que

$$\int_E |f-f_n|^p\, dx \to 0,$$

ce qui implique contradiction. La démonstration est donc achevée.

5. Ajoutons encore quelques mots concernant la classe H^p des points $X = \{x_k\}$ à une infinité dénombrable de coordonnées et tels que la série $\Sigma |x_k|^p$ soit convergente. On sait que les classes L^p et H^p, outre la correspondance réelle bien connue qui existe entre elles dans le cas où $p=2$, montrent aussi dans les autres cas une analogie presque complète. Je dis *presque* complète et il ne sera pas sans intérêt d'envisager à ce point de vue le théorème que nous venons de démontrer. L'analogue de notre théorème pour la classe H^p fut établi par M. Hildebrandt dès 1912;[3])

[3]) T. H. Hildebrandt, Necessary and sufficient conditions for the interchange of limit and summation in the case of sequences of infinite series of a certain type, *Annals of Mathematics*, second series, **14** (1912—1913), pp. 81—83. Cf. aussi F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, 1913, pp. 58—59.

il affirme que *les relations*

$$x_k^{(n)} \to x_k \,(k=1,2,\ldots); \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p \to \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$$

entraînent la relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^p \to 0.$$

Mais ce théorème est aussi l'analogue de notre lemme dans lequel nous avons admis la convergence effective au lieu de la convergence faible. Voilà la différence essentielle entre l'étude de la classe H^p et celle de L^p; pour la première, la convergence forte et même la convergence faible, dont nous n'avons pas besoin de rappeler les définitions, impliquent toujours la convergence effective; mais il est loin d'être ainsi pour la seconde; en effet, pour la classe L^p, en cas de convergence faible, on ne pourra même pas affirmer l'existence d'une suite partielle convergeant effectivement. Voilà pourquoi notre théorème passait inaperçu plus longtemps que celui de M. Hildebrandt.

(Reçu le 28 april 1928)