Zur Theorie der abstrakten Spiele.

Von LÁSZLÓ KALMÁR in Szeged.

Einleitung.

Ich werde mich mit solchen Spielen beschäftigen, welche von zwei Spielern durch abwechselnde Züge geführt werden, deren Wahl und Durchführbarkeit nur von dem Entschlusse des am Zuge befindlichen Spielers bzw. von den Spielregeln, aber keineswegs vom Zufall oder von der Handfertigkeit des Spielers abhängt, und welche der Reihe nach Positionen herbeiführen, die beiden Spielern vollständig bekannt sind (Spiele von der Art der Kartenspiele werden also durch diese Festsetzung ausgeschlossen). Das bekannteste Beispiel bietet das Schachspiel; andere Beispiele: das Damenspiel, Mühlenspiel, Nimspiel.[1]) Zur Illustration einiger nicht ganz einfacher Möglichkeiten, die bei einem Spiele vorkommen können, ist die folgende Verallgemeinerung des letztgenannten Spiels sehr geeignet Es sei eine wohlgeordnete Menge $\mathfrak{M}$ gegeben; als Positionen des zu definierenden Spiels, des „zur Menge $\mathfrak{M}$ gehörigen Nimspiels", sollen die endlichen Folgen von nicht notwendig verschiedenen Elementen der Menge $\mathfrak{M}$ gelten. Die Spielregeln lauten: der Spieler, der am Zuge ist, macht einen Zug indem er ein beliebiges Element μ der Folge durch ein anderes Element μ' von $\mathfrak{M}$, welches in der Wohlordnung von $\mathfrak{M}$ vor μ steht, ersetzt Kann er das nicht (kommt also in der Position nur das erste Element von $\mathfrak{M}$ vor), so hat er das Spiel verloren.

Die Fragestellungen, welche ich beantworten werde, schliessen sich sehr eng an den, dem praktischen Schachspielern geläufigen

---

[1]) Betreffend des Nimspiels vgl. z. B. W. AHRENS, Mathematische Spiele, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. I_2. (1900—94), Art. I. G. 1., S. 1092.

Begriff: „eine Position, bei welcher der eine Spieler auf Gewinn (Verlust) steht". Dass dieser Begriff mathematisch-präzis gefasst werden muss und kann, hat Herr ZERMELO in einem sehr inhaltsvollen Vortrag[2]) erkannt.

Herr ZERMELO hat für die Spiele, bei welchen, wie z. B. bei dem Schachspiele, die Anzahl ν aller möglichen Positionen endlich ist, u. A. bewiesen, dass, wenn der eine Spieler A in einer Position q auf Gewinn steht, eine Taktik für ihn vorhanden ist, durch welche er gewiss in weniger als ν Zügen gewinnt. Der Beweis beruht wesentlich auf der Tatsache, dass A, falls er in der Position q auf Gewinn steht, durch Befolgung einer geeigneten Taktik „ohne Wiederholung", d. h. so gewinnen kann, dass, wie auch der Gegner spielen mag, niemals eine Partie entsteht, in der dieselbe Position mehr als einmal vorkommt. Diese letztere, gar nicht selbstverständliche Tatsache wurde durch Herrn ZERMELO nicht bewiesen, wodurch, wie Herr KÖNIG bemerkt hat,[3]) eine Lücke des ZERMELOschen Beweises entsteht. Daher hat Herr KÖNIG, angeregt durch eine mündliche Bemerkung des Herrn v. NEUMANN, statt des erwähnten Satzes des Herrn ZERMELO einen Satz bewiesen, der nicht nur die Spiele mit endlich vielen Positionen erfasst, sondern überhaupt alle Spiele, bei denen aus irgendeiner Position q durch einen regelrechten Zug nur je eine endliche Anzahl $\mu=\mu(q)$ von neuen Positionen entstehen kann. Der fragliche Satz lautet: zu jeder Position q, in der A auf Gewinn steht, gibt es eine natürliche Zahl ν_q, so dass A, von q ausgehend, den Gewinn in höchstens ν_q Zugpaaren erzwingen kann. Durch Anwendung dieses Satzes hat dann Herr ZERMELO die oben erwähnte Lücke ausgefüllt,[4]) indem er, ohne die Möglichkeit des Gewinns ohne Wiederholung heranzuziehen, bewies, dass bei Spielen mit endlich vielen Positionen die Zahl ν_q stets kleiner als die Gesamtanzahl der Positionen ist.

Ich werde nun, im Gegensatze zu einer von Herr KÖNIG a. a. O. ausgesprochenen Vermutung zeigen, dass auch der ursprüngliche Gedankengang des Herrn ZERMELO unmittelbar zu einem

[2]) E. ZERMELO, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, *Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians* (Cambridge, 1912), Bd. 2., S. 501–504.

[3]) D. KÖNIG, Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche, *diese Acta*, Bd. 3., (1927), S. 121–130.

[4]) D. KÖNIG, a. a. O.[3]), Zusatz auf den Seiten 129–130.

einwandfreien Beweise ergänzt werden kann; ich kann nämlich, auch ohne die Endlichkeit der Menge der aus einer festen Position durch einen regelrechten Zug erreichbaren Positionen vorauszusetzen, ja ohne irgendwelche Endlichkeitsvoraussetzungen, die Möglichkeit des Gewinns ohne Wiederholung beweisen. Dabei mache ich von dem Satze des Herrn König weder explizite, noch implizite Gebrauch: sowohl der Satz selbst, wie auch die Beweismethode des Herrn König sind ja wesentlich an eine Endlichkeitsvoraussetzung gebunden.

Es ist zu beachten, dass eine Taktik des A gar nicht so beschaffen sein muss, dass der Umstand, ob ein Zug $q \to q'$ des A der Taktik entspricht oder nicht, nur von den Positionen q, q abhängt; es ist sehr wohl möglich, dass es auch von der Vorgeschichte der Partie, in der q vorkommt, abhängig ist. Eine Taktik, die doch so beschaffen ist, nenne ich eine Taktik im engeren Sinne. Nun werde ich den Satz beweisen, dass, falls A in der Position q auf Gewinn steht, es für ihn auch eine Taktik in engerem Sinne gibt, die gewiss zum Gewinn führt.[5]) Daraus wird natürlich wieder der (im Texte schon früher viel einfacher zu beweisende) Satz über Gewinn ohne Wiederholung folgen. Die Existenz einer Gewinntaktik in engerem Sinne werde ich durch die Anwendung der Theorie der transfiniten Zahlen beweisen,[6]) und zwar auf dem Umwege einer Verallgemeinerung des Satzes des Herrn König.

Wie ich schon erwähnt habe, gilt der Satz des Herrn König nicht ohne die zugehörige Endlichkeitsvoraussetzung. In der Tat, man betrachte z. B. die Position $\{\omega, \omega\}$[7]) bei dem zur Menge $\mathfrak{M} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ gehörigen Nimspiele.[8]) In dieser Position

---

[5]) Wie Herr König, a. a. O.[3]), S. 127. erwähnt, kann er diesen Satz, natürlich auch nur im Speziellfalle, wenn die auch zur Gültigkeit seines erwähnten Satzes nötigen Endlichkeitsvoraussetzungen erfüllt sind, durch graphentheoretische Methoden beweisen.

[6]) Wenn es sich nur um den Beweis diesen Satzes handelt, kann man die Anwendung der transfiniten Zahlen durch die geistreiche Methode umgehen, die Herr Kuratowski zur Vermeidung der transfiniten Induktion in sehr allgemeinen Fällen gegeben hat. (C. Kuratovski, Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques, *Fundamenta Mathematicae*, Bd. 3., S. 76—108) Ein einfacher Beweis dieser scheinbar so naheliegenden Tatsache lässt sich aber auch in dieser Weise nicht erzielen.

[7]) Hier bezeichnet ω üblicherweise die kleinste transfinite Ordungszahl.

[8]) Das zu einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{M}$ gehörige Nimspiel wurde am Anfange dieser Einleitung definiert.

steht offenbar derjenige Spieler A auf Gewinn, der nicht am Zuge ist. Er hat nämlich, um zu gewinnen, auf den Zug $\{\omega, \omega\} \to \{\mu, \omega\}$ des Gegners $\{\mu, \omega\} \to \{\mu, \mu\}$, dann auf $\{\mu, \mu\} \to \{\mu, \mu'\}$ $\{\mu, \mu'\} \to \{\mu', \mu'\}$ usw. erwidern. Und das ist auch der einzige Weg für ihn, um sicher zu gewinnen; weicht er davon ab, so kann sein Gegner B das Spiel in analoger Weise zum Gewinn führen. Man sieht auch, dass B, wie gross auch die natürliche Zahl ν sein mag, den Verlust bis zum $\nu+1$-ten Zugpaare verschieben kann, dadurch nämlich, dass er zunächst $\{\omega, \omega\} \to \{\nu, \omega\}$ zieht und dann, wenn A die oben angegebene Taktik befolgt, immer nur „kürzeste" Züge von der Form $\{\xi, \xi\} \to \{\xi, \xi-1\}$ macht: also kann A in der Position $\{\omega, \omega\}$ die Höchstanzahl der zum Gewinn nötigen Züge nicht voraussagen.

Ich werde doch, in Verallgemeinerung des Satzes des Herrn König, beweisen, dass es sich bei jedem Spiele (ohne irgendeine Endlichkeitsvoraussetzung) zu jeder Position q, in der A auf Gewinn steht, eine, eventuell transfinite, *Ordnungszahl* ν_q zuordnen lässt, die als Verallgemeinerung der durch den Satz des Herrn König gesicherten *natürlichen Zahl* ν_q anzusehen ist[9]) So gehört z. B. zur erwähnten Position $\{\omega, \omega\}$ die transfinite Zahl ω, wie überhaupt zu jeder Position eines Spiels, in welcher der Spieler A, der auf Gewinn steht, die Höchstanzahl der zum Gewinn nötigen Züge zwar sofort nicht, jedoch schon nach dem nächsten Zuge des Gegners angeben kann. Ebenso gehört z. B. die transfinite Zahl $\omega+\mu$ (μ endlich) zu jeder Position, in der A nach $\mu+1$, aber nicht sicher nach weniger Zugpaaren imstande sein wird, eine von den inzwischen gemachten Zügen des Gegners abhängige Höchstanzahl der zum Gewinn noch nötigen Züge anzugeben. Die transfinite Zahl $\omega . 2 = \omega + \omega$ gehört zu jeder Position, in der A auch schon die obige Zahl μ nicht sofort, sondern erst nach dem nächsten Zuge des Gegners angeben kann. Für die transfinite Zahl ω^2 ist die Sache noch etwas verwickelter und kann durch die Position $\{\omega^2, \omega^2\}$ des zur Menge

$$\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega . 2, \ldots, \omega . 3, \ldots, \omega^2\}$$

gehörigen Nimspiels illustriert werden; allgemein gehört zur Position $\{\alpha, \alpha\}$ des zur Menge der transfiniten Zahlen $\leqq \alpha$ (oder zu

[9]) Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, dass eine Partie, in welcher einer der Spieler gewinnt, notwendig endlich ist, also eine Ankündigung „Matt in ν Zügen" für eine transfinite Zahl ν wörtlich keinen Sinn hat.

jeder umfassenderen Menge der transfiniten Zahlen) gehörigen Nimspiels die transfinite Zahl α. (Dies alles dient nur zur Orientierung; was ich allgemein darunter verstehe, dass zu einer Position eine Ordnungszahl α gehört, werde ich im III. Teile genau festlegen.)

Ich werde im I. Teile die nötigen Begriffe formulieren, ihre einfachsten Eigenschaften beweisen und alles folgende vorbereiten, damit ich im II. und III. Teile die übrigen Sätze leicht beweisen kann.

I.

1. Unter einem *Spiele S* werde ich folgendes verstehen: Es sind gegeben

a) zwei fremde Mengen $\mathfrak{Q}_A$ und $\mathfrak{Q}_B$,

b) eine gewisse Untermenge $\mathfrak{P}$ der Menge sämtlicher geordneten Paare (q_1, q_2) von der Art, dass entweder q_1 ein Element von $\mathfrak{Q}_A$, q_2 ein Element von $\mathfrak{Q}_B$ ist, oder umgekehrt.

Man hat sich vorzustellen, es gibt zwei *Spieler*, A und B; die Elemente der Menge $\mathfrak{Q}_A$, bzw. $\mathfrak{Q}_B$ vertreten die *Positionen* des Spiels *S*, bei denen A, bzw. B *am Zuge* ist; die Vereinigungsmenge $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_A + \mathfrak{Q}_B$ ist also die Menge aller Positionen des Spiels *S*. Ein geordnetes Paar (q_1, q_2) von der Art, dass das eine von q_1, q_2 zu $\mathfrak{Q}_A$, das andere zu $\mathfrak{Q}_B$ gehört, representiert einen *Zug* und wird mit $q_1 \rightarrow q_2$ bezeichnet; derselbe ist ein Zug des A oder B, je nachdem bei q_1 der Spieler A oder B am Zuge ist. Die Angabe der Menge $\mathfrak{P}$ involviert die *Zugregeln:* die Elemente der Menge $\mathfrak{P}$ sind nämlich als die im Spiele *S regelrechten Züge* zu deuten.

Es is zu beachten, dass das Wort *Position* in dem Sinne verstanden wurde, dass alle Momente, die in den Spielregeln eine Rolle spielen, inbegriffen werden, also, ob der Zug $q_1 \rightarrow q_2$ regelrecht ist, oder nicht, durch die Positionen q_1, q_2 vollständig bestimmt sei (also nicht etwa von der Art, wie q_1, in später festzulegendem Sinne, entstanden ist, abhänge).[10]

Ist eine Position q_0 so beschaffen, dass es keinen regelrechten Zug des Spiels *S* von der Form $q_0 \rightarrow q_1$ gibt, so heisst q_0 eine

[10] Z. B. sollen bei dem Schachspiele zwei Positionen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass bei der einen der weisse König sich schon bewegt hat, bei dem anderen aber nicht, wegen einer Rochaderegel als verschieden gelten. Natürlich gelten bei jedem Spiele zwei Positionen, wenn bei der einen der Spieler A, bei der anderen B am Zuge ist, immer als verschieden.

Mattposition (kurz: ein Matt) des Spiels S; und zwar, wenn bei q_0 z. B. der Spieler A am Zuge ist, ein *Matt für* A im Spiele S.[11])

Unter einem *gemäss dem Spiele S* (eigentlich: gemäss den Spielregeln des Spiels S) *gespielten n-zügigen Partieanfange* verstehe ich eine Folge

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n \qquad (\mathfrak{p})$$

von $n+1$ Positionen derart, dass $q_{k-1} \to q_k$ für $k=1, 2, \ldots, n$ ein regelrechter Zug des Spiels S ist. Ist dabei q_n eine Mattposition, so nenne ich den Partieanfang $\mathfrak{p}$ eine *entschiedene Partie,* und zwar, wenn q_n z. B. ein Matt für A ist, eine *von* B *gewonnene,* oder eine *von* A *verlorene Partie gemäss S.* Speziell gilt jede Position q_0 als ein *nullzügiger Partieanfang,* und, falls sie eine Mattposition ist, auch als eine entschiedene Partie.

Eine Folge

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$$

von (abzählbar) unendlich vielen Positionen derart, dass $q_{k-1} \to q_k$ für $k=1, 2, \ldots, n, \ldots$ ein regelrechter Zug des Spiels S ist, nenne ich eine *unentschiedene (Remis-) Partie,* oder eine *weder von* A, *noch von* B *verlorene Partie gemäss S.*[12]) Unter einer *Partie gemäss S* verstehe ich eine entschiedene, oder eine unentschiedene, gemäss S gespielte Partie.

---

[11]) Von zwei Definitionen, bzw. Sätzen, die sich nur durch Vertauschung der Rolle der beiden Spieler A und B unterscheiden, werde ich der Kürze wegen immer nur eine angeben. — In Bezug auf das Patt (bei dem Schachspiele) vgl. die Fussnote [12]).

[12]) Den Umstand, dass bei dem Schachspiel auch Partieanfänge vorkommen können, die mit einer Position (einem „Patt") q, für welche kein regelrechter Zug von der Form $q \to q'$ vorhanden ist, endigen, und trotzdem nach den Spielregeln als unentschiedene Partie gelten, kann man leicht durch eine unwesentliche Abänderung des Wortlautes der Spielregeln erledigen, etwa folgenderweise. Man führt ein fünfundsechsigstes Feld $\mathfrak{f}$ ein. Ist $\mathfrak{f}$ leer und liegt kein Patt vor, so gelten die üblichen Schachspielregeln und es darf kein Stein auf $\mathfrak{f}$ gehen; im Falle einer Pattposition darf dagegen der am Zuge befindliche Spieler einen seiner Steine auf $\mathfrak{f}$ stellen. Ist $\mathfrak{f}$ besetzt, so hören die üblichen Regeln des Schachspiels gänzlich auf; der Spieler, der am Zuge ist, soll den auf $\mathfrak{f}$ stehenden Stein auf ein beliebiges Feld des Schachbrettes und zugleich einen seiner Steine auf $\mathfrak{f}$ stellen. Dadurch verwandelt sich jede „Pattpartie" in eine unendlich lange, also in eine auch im Sinne des Textes unentschiedene Partie. Ähnliche Abänderungen des Wortlautes der Spielregeln können auch bei der Anwendung auf andere bekannte Spiele nötig sein.

2. Ist ein Spiel S so beschaffen, dass jede mögliche Partie gemäss S von A gewonnen ist, so nenne ich S ein *Gewinnspiel des Spielers* A; ist S so beschaffen, dass keine Partie gemäss S von A verloren (also jede entweder gewonnen, oder unentschieden) ist, so heisst S ein *Nichtverlustspiel des Spielers* A. Ein Spiel S ist ersichtlich dann und nur dann ein Nichtverlustspiel des A, wenn keine der Positionen des Spiels S ein Matt für A ist.

Das Spiel S' soll ein *Unterspiel* des Spiels S (und S ein *Oberspiel* des Spiels S') heissen, wenn sowohl die Mengen $\mathfrak{Q}'_A$ und $\mathfrak{Q}'_B$ der Positionen des Spiels S', wie auch die Menge $\mathfrak{P}'$ der regelrechten Züge des Spiels S' bzw. Untermengen der entsprechenden, zu S gehörigen Mengen $\mathfrak{Q}_A$, $\mathfrak{Q}_B$, $\mathfrak{P}$ sind. Man spielt immer ein Unterspiel des Spiels S, wenn man S mit irgendwelcher Beschränkung spielt, z. B. wenn man bei dem Schachspiele die feindliche Dame verabredungsweise nie schlägt. Die Beschränkung kann auch aus einer „Taktik" entspringen; ein Unterspiel kann aber nur dann als eine Taktik des einen Spielers gedeutet werden, wenn die in ihr enthaltene Beschränkung den anderen Spieler überhaupt nicht berührt. Dementsprechend definiere ich:

Das Unterspiel S' des Spiels S soll eine *Taktik in engerem Sinne des Spielers* A *im Spiele* S heissen, wenn jeder im Oberspiele S regelrechte Zug $q_1 \rightarrow q_2$ des Gegners B auch im Spiele S' regelrecht ist, falls nur q_1 überhaupt eine Position des Spiels S' ist (also soll dann auch die Position q_2 eine Position des Unterspiels S' sein).

Der Ausdruck: Taktik *in engerem Sinne* (kurz: i. e. S.) zeigt, dass es hier nur um eine spezielle Art der Taktik handelt: es hängt nämlich nur von der Position q_1, nicht aber von der Vorgeschichte der Partie, in der sie vorkommt, ab, welche Züge von der Form $q_1 \rightarrow q_2$ der betreffenden Taktik entsprechen. Darum wird später noch eine Erweiterung des Begriffes Taktik nötig sein.

Ist eine Taktik i. e. S. des Spielers A im Spiele S selbst ein Gewinnspiel bzw. ein Nichtverlustspiel, führt sie also immer zum Gewinn bzw. nie zum Verlust, so nenne ich sie eine *Gewinntaktik*, bzw. eine *Nichtverlusttaktik i. e. S.* des A in S.

3. Es sei von jetzt an ein Spiel S fest vorgelegt; alle Begriffe, die nur in Bezug auf ein Spiel einen Sinn haben, werden sich, wenn nicht anders gesagt ist, auf S beziehen.

Ich nenne eine Position q_0 eine *Gewinnposition i. e. S. des*

Spielers A (im Spiele S), oder ich sage, dass *der Spieler* A *in der Position* q_0 *i. e. S. auf Gewinn steht*, wenn es eine Gewinntaktik i. e. S. T des A gibt, welche sich in der Position q_0 anwenden lässt, d. h. q_0 unter den Positionen des Spiels T vorkommt. Entsprechend sage ich, dass eine Position q_0 eine *Verlustposition i. e. S. des Spielers* A (in S) ist, oder, dass A *in der Position* q_0 *i. e. S. auf Verlust steht*, wenn es keine Nichtverlusttaktik i. e. S. T des A gibt derart, dass q_0 eine Position des Spiels T ist.

Man wird nun erwarten, dass Gewinnposition i. e. S. des einen Spielers und Verlustposition i. e. S. seines Gegners dasselbe bedeuten. Das ist in der Tat so; ich kann es aber nur durch transfinite Induktion beweisen (vgl. doch Fussnote[6])) und ich muss damit bis zum Ende des III. Teils warten. Jetzt beweise ich nur die ohne weiteres aus der Definition sich ergebende Hälfte der Behauptung, den

Satz I. *Eine Gewinnposition i. e. S.* q_0 *des Spielers* A *ist eine Verlustposition i. e. S. des Gegners* B.

Beweis. Sonst gäbe es eine Gewinntaktik i. e. S. T_1 des A und eine Nichtverlusttaktik i. e. S. T_2 des B, und q_0 wäre eine gemeinsame Position der Spiele T_1 und T_2. Was wird nun, wenn A gemäss T_1, B gemäss T_2 spielt? Betrachten wir also folgendes Spiel D, den „Durchschnitt der Spiele T_1 und T_2." Die Positionen des Spiels D seien die gemeinsamen Positionen der Spiele T_1 und T_2; ein Zug sei im Spiele D dann und nur dann regelrecht, wenn derselbe sowohl in T_1, als auch in T_2 regelrecht ist. D ist kein „leeres Spiel", d. h. wenigstens eine der zu D gehörigen Mengen $\mathfrak{Q}_A$, $\mathfrak{Q}_B$ ist nicht leer, denn q_0 ist ja eine Position des Spiels D. Daher[13]) gibt es eine gemäss D gespielte Partie $\mathfrak{p}$. Ist diese Partie entschieden, so endigt sie mit einem Matt q für A oder B in D. Wenn es nun eine Position q' des Spiels T_1, bzw. T_2, je nachdem bei q der Spieler A oder B am Zuge ist, gäbe derart, dass der Zug $q \to q'$ in T_1 (bzw. T_2) regelrecht ist, so wäre

[13]) Dass es zu jedem nichtleeren Spiele S eine gemäss S gespielte Partie gibt, beweist man, wie folgt. Gibt es eine Mattposition im Spiele S, so ist dieselbe schon eine (nullzügige) Partie gemäss S; sonst bezeichne, für jede Position q des Spiels S, $f(q)$ eine Position derart, dass der Zug $q \to f(q)$ in S regelrecht sei. (Hier wurde das Zermelosche Auswahlaxiom verwendet.) Ist nun q_0 eine beliebige Position des Spiels S, so ist

$$q_0, f(q_0), f(f(q_0)), f(f(f(q_0))), \ldots$$

eine gemäss S gespielte Partie.

derselbe auch im Oberspiele S regelrecht, also auch in T_2 (bzw. T_1), da dieses eine Taktik des bei q *nicht* am Zuge befindlichen Spielers ist; daher wäre der Zug $q \rightarrow q'$ auch in D regelrecht, was nicht zutrifft. Also gibt es keine solche Position q', d. h. q ist auch in T_1 (bzw. T_2) ein Matt für A (bzw. B), entgegen der Voraussetzung, dass T_2 ein Nichtverlustspiel des B, T sogar ein Gewinnspiel des A ist. Ist aber die Partie $\mathfrak{p}$ unentschieden, so ist sie auch gemäss T_1 gespielt,[14] was aber der Voraussetzung, dass T_1 ein Gewinnspiel ist, widerspricht.

4. Um den Begriff der Taktik und die damit zusammenhängenden Begriffe auch *im weiteren Sinne* erklären zu können, bedarf ich noch des Begriffes des Schriftspiels $\mathfrak{S}$ eines Spiels S. Dasselbe soll, wie folgt, definiert werden. Die Positionen des Spiels $\mathfrak{S}$ sind die gemäss S gespielten Partieanfänge $\mathfrak{q}$:

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n;$$

im Spiele $\mathfrak{S}$ ist bei $\mathfrak{q}$ derjenige Spieler am Zuge, wie bei q_n im Spiele S. Ist $\mathfrak{q}'$ eine weitere Position des Spiels $\mathfrak{S}$, so soll $\mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}'$ dann und nur dann als ein regelrechter Zug des Spiels $\mathfrak{S}$ gelten, wenn $\mathfrak{q}'$ die Form

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}$$

hat und der Zug $q_n \rightarrow q_{n+1}$ in S regelrecht ist.[15]

Ich definiere nun eine *Taktik in weiterem Sinne* $\mathfrak{T}$ *des Spielers* A *im Spiele* S als eine Taktik in engerem Sinne des A in dem Schriftspiele $\mathfrak{S}$ des Spiels S. Ich sage, dass A in einer gemäss S gespielten Partie $\mathfrak{p}$ die Taktik i. w. S. $\mathfrak{T}$ befolgt, wenn die „Schriftpartie" der Partie $\mathfrak{p}$, d. h. die Folge seiner Partieanfänge, eine Partie gemäss $\mathfrak{T}$ ist.

Man erhält den Begriff der *Gewinntaktik, Nichtverlusttaktik, Gewinnposition, Verlustposition in weiterem Sinne* (i. w. S.), wenn man in den Definitionen der entsprechenden Begriffe i. e. S. (am Ende von **2.** und am Anfange von **3.**) den Zusatz i. e. S. überall

---

[14]) Dieser Schluss gilt natürlich nur im Falle, wenn die Partie $\mathfrak{p}$ unentschieden ist: eine entschiedene Partie gemäss einem Spiele hat keine vollendete Partie gemäss einem Oberspiele zu sein; sie ist, wenn ihre letzte Position im Oberspiele kein Matt ist, ein blosser Partieanfang.

[15]) Spielt man z. B. Schach in *Schrift* (etwa in Korrespondenz) und betrachtet man die so entstandenen einzelnen Partieanfänge als Positionen, so spielt man eigentlich das Schriftspiel des Schachspiels: daher allgemein der Name.

durch i. w. S. ersetzt. Z. B. heisst eine Position q eine Gewinnposition i. w. S. des Spielers A, wenn es eine Gewinntaktik i. w. S. $\mathfrak{T}$ des A gibt derart, dass q (als nullzügiger Partieanfang) eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ ist.[16])

5. Ein Vergleich der entsprechenden Begriffe i. e. S. und i. w. S. zeigt folgendes. Eine Taktik i. e. S. T des A ist selbst zwar keine Taktik i. w. S., wohl aber ihr Schriftspiel $\mathfrak{T}$; und eine Partie, in welcher A die Taktik i. w. S. $\mathfrak{T}$ befolgt, ist eine gemäss dem Spiele T gespielte Partie, und umgekehrt. Daraus folgt, dass eine Gewinnposition i. e. S. immer auch Gewinnposition i. w. S. ist. Bei den Verlustpositionen ist aber die Sache, wie man aus dem negativen Charakter der Definition der Verlustposition sofort ersieht, *umgekehrt:* der Begriff Verlustposition „i. e. S." ist tatsächlich *nicht enger,* als der entsprechende Begriff „i. w. S." Dieser Umstand wird uns glücklicherweise nicht mehr lange Unbequemlichkeiten machen, denn es wird sich gleich die *Äquivalenz* beider Begriffe herausstellen. (Die Äquivalenz der entsprechenden Begriffe der Gewinnposition wird sich auch ergeben, aber nur im III. Teile.)

Zuerst muss ich noch zwei Hilfssätze über Gewinnpositionen i. w. S. beweisen.

Hilfssatz Ia. *Es sei die Position q_0, bei welcher der Spieler* A *am Zuge ist, so beschaffen, dass es einen regelrechten Zug $q_0 \to q_0'$ des* A *gibt derart, dass* A *in der Position q_0' i. w. S. auf Gewinn steht. Dann ist auch q_0 eine Gewinnposition i. w. S. des A.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{T}$ die zur Position q_0' gehörige Gewinntaktik i. w. S. des A (also derart, dass q_0' eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ sei). Dann konstruiere ich eine Gewinntaktik i. w. S. $\mathfrak{T}_0$ des A durch „Adjunktion des Zuges $q_0 \to q_0'$ zum Spiele $\mathfrak{T}$" folgendermassen. Die Positionen des Spiels $\mathfrak{T}_0$ seien die Partieanfänge des Spiels S von der Form

$$q_0,\ q_1,\ q_2, \ldots, q_n,$$

kurz: $[q_0, \mathfrak{q}]$, wo der Partieanfang $\mathfrak{q}$, d. h.

$$q_1,\ q_2, \ldots, q_n$$

eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ ist; als Grenzfall soll auch q_0 eine Position des Spiels $\mathfrak{T}_0$ sein. Die Bestimmung, welcher Spieler bei

---

[16]) Diese Definition des Begriffs einer Gewinnposition i. w. S. des A deckt sich, wie man leicht sieht, mit der von Herrn König a. a. O.[3]) gegebenen Definition einer Position, in welcher A auf Gewinn steht.

einer Position am Zuge sein soll, sei „aus dem Schriftspiele $\mathfrak{S}$ des Spiels S übertragen," d. h. es soll im Spiele $\mathfrak{T}_0$ immer derjenige Spieler am Zuge sein, wie in $\mathfrak{S}$. Ein Zug $[q_0, \mathfrak{q}_1] \rightarrow [q_0, \mathfrak{q}_2]$ soll in $\mathfrak{T}_0$ dann und nur dann als regelrecht gelten, wenn der Zug $\mathfrak{q}_1 \rightarrow \mathfrak{q}_2$ im Spiele $\mathfrak{T}$ als regelrecht gilt; $[q_0, \mathfrak{q}] \rightarrow q_0$ sei niemals, $q_0 \rightarrow [q_0, \mathfrak{q}]$ dann und nur dann ein regelrechter Zug in $\mathfrak{T}_0$, wenn $\mathfrak{q}$ der nullzügige Partieanfang q_0' ist. Da das Spiel $\mathfrak{T}$ nach Voraussetzung eine Taktik i. w. S. ist, so ist es $\mathfrak{T}_0$ auch. Jede Partie gemäss S, in der A die Taktik i. w. S. $\mathfrak{T}_0$ befolgt, hat die Form $[q_0, \mathfrak{p}]$, wo in der Partie $\mathfrak{p}$ die Gewinntaktik i. w. S. $\mathfrak{T}$ befolgt wird; also ist jede solche Partie von A gewonnen, d. h. $\mathfrak{T}_0$ ist auch ein Gewinnspiel des A. Daher ist q_0 eine Gewinnposition i. w. S. des A.

H i l f s s a t z Ib. *Es sei die Position q_0, bei welcher der Spieler* B *am Zuge ist, so beschaffen, dass für alle regelrechten Züge $q_0 \rightarrow q_0'$ des* B *die Position q_0' eine Gewinnposition i. w. S. des* A *ist. Dann ist auch q_0 eine Gewinnposition i. w. S. des* A.

B e w e i s. Es bezeichne $\mathfrak{T}(q_0')$ die zur Position q_0 gehörige Gewinntaktik i. w. S. des A. Ich adjungiere zu jedem Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$ den entsprechenden Zug $q_0 \rightarrow q_0'$ und dann „addiere" alle so entstandenen Spiele, d. h. ich konstruiere folgendes Spiel $\mathfrak{T}_0$. Die Positionen des Spiels $\mathfrak{T}_0$ seien die Partieanfänge gemäss S von der Form $[q_0, \mathfrak{q}]$ wo $\mathfrak{q}$ eine Position wenigstens eines der Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$ ist; als Grenzfall sei auch q_0 eine Position des Spiels $\mathfrak{T}_0$. Die Bestimmung des am Zuge befindlichen Spielers sei wieder aus dem Schriftspiele $\mathfrak{S}$ übertragen. Ein Zug $[q_0, \mathfrak{q}_1] \rightarrow [q_0, \mathfrak{q}_2]$ soll in $\mathfrak{T}_0$ dann und nur dann als regelrecht gelten, wenn $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ mit einer der Positionen q_0', und zwar mit derselben, beginnen, und der Zug $\mathfrak{q}_1 \rightarrow \mathfrak{q}_2$ in dem zu *dieser* q_0' gehörigen Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$ regelrecht ist, ein Zug $[q_0, \mathfrak{q}] \rightarrow q_0$ nie, ein Zug $q_0 \rightarrow [q_0, \mathfrak{q}]$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{q}$ ein nullzügiger Partieanfang und zwar einer der q_0' ist. $\mathfrak{T}_0$ ist eine Taktik i. w. S. des A: die Taktikeigenschaft folgt für Züge von der Form $q_0 \rightarrow [q_0, \mathfrak{q}]$ aus der Konstruktion des Spiels $\mathfrak{T}_0$, für andere Züge aus der Taktikeigenschaft aller Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$. Jede Partie, in der A die Taktik i. w. S. $\mathfrak{T}_0$ befolgt, hat die Form $[q_0, \mathfrak{p}]$, wo in der Partie $\mathfrak{p}$ eine der Taktiken $\mathfrak{T}(q_0')$ befolgt wird, daher ist $\mathfrak{T}_0$, wie alle Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$, ein Gewinnspiel des A. Da nun q_0 eine Position des Spiels $\mathfrak{T}_0$ ist, ist auch sie eine Gewinnposition des A.

6. Eine Position des Spiels S ist dann und nur dann eine

Gewinnposition, bzw. Verlustposition i. w. S., wenn sie, als nullzügiger Partieanfang, eine Gewinnposition, bzw. Verlustposition i. e. S. im Schriftspiele $\mathfrak{S}$ ist. Daher folgt aus dem Satze I., angewandt auf $\mathfrak{S}$, dass dieser Satz auch dann gilt, wenn der Zusatz i. e. S. durch i. w. S. ersetzt wird. Ich werde jetzt auch die Umkehrung des so gewonnenen Satzes beweisen.

Satz II. *Gewinnposition i. w. S. des Spielers* A *bedeutet dasselbe, wie Verlustposition i. w. S. seines Gegners* B.[17])

Dazu muss ich also nur folgendes beweisen: Ist q_0 keine Gewinnposition i. w. S. des A, so ist dieselbe keine Verlustposition i. w. S. des B. Ich beweise sogar (*sogar* nach der obigen Bemerkung, nach welcher eine Verlustposition i. w. S. immer eine Verlustposition i. e. S. ist) den

Satz III. *Eine Position q_0, welche keine Gewinnposition i. w. S. des Spielers* A *ist, ist keine Verlustposition i. e. S des Gegners* B.

Vorbemerkung: daraus wird ausser dem Satze II. auch der schon angekündigte

Satz IV. *Verlustposition i. e. S. und i. w. S. des Spielers* A *bedeuten dasselbe*

folgen, denn nach der „vollständigen Umkehrung" des Satzes III. (wenn man dabei noch die Rolle der Spieler A und B vertauscht) ist eine Verlustposition i. e. S. des A immer eine Gewinnposition i. w. S. des B, also nach dem Satze II. (wieder mit Vertauschung der Spieler) eine Verlustposition i. w. S. des A; also ist der Begriff Verlustposition i. e. S. auch *nicht umfassender,* als der Begriff Verlustposition i. w. S.

Beweis des Satzes III. Nach der Voraussetzung steht der Spieler A in der Position q_0 nicht auf Gewinn i. w. S. Lassen wir B das Spiel so führen, dass A nie i. w. S. auf Gewinn stehe! Betrachten wir also folgendes Spiel R. Die Positionen des Spiels R seien diejenigen Positionen des Spiels S, in denen A nicht i. w. S. auf Gewinn steht. Die Bestimmung, welcher Spieler bei einer Position im Spiele R am Zuge ist, soll aus dem Spiele S übertragen werden. Ebenso seien die Zugregeln aus S übertragen, d. h. ein Zug $q' \rightarrow q''$ soll in R dann und nur dann als regelrecht

[17]) Wie Herr König mir nachträglich freundlichst mitteilte, war dieser Satz auch Herrn v. Neumann bekannt.

gelten, wenn derselbe auch in S regelrecht ist und ausserdem natürlich q', q'' Positionen des Spiels R sind.

R ist also ein Unterspiel des Spiels S; ich zeige, dass es sogar ein Taktik i. e. S. des Spielers B im Spiele S ist. Denn ist $q' \to q''$ ein regelrechter Zug des Gegners A im Spiele S und ist q' eine Position des Spiels R, so ist es q'' auch, d. h., A steht in der Position q'' nicht i. w. S. auf Gewinn: denn sonst stünde er nach dem Hilfssatze Ia. schon in der Position q' auf Gewinn i. w. S., also wäre q' keine Position des Spiels R. Die Taktik R ist ein Nichtverlustspiel des B, d. h. keine der Positionen des Spiels R ist ein Matt für B in R. Es sei nämlich q' eine Position des Spiels R, in welcher B am Zuge ist; dieselbe kann sicher kein Matt für B *im Spiele S* sein, denn sonst wäre sie eine Gewinnstellung i. w. S. (sogar i. e. S.) des A. Wäre nun q' ein Matt für *B im Spiele R* (d. h. „würde die Taktik, gemäss R zu spielen, in der Position q' versagen"), so wäre, für alle in S regelrechten Züge $q' \to q''$ des B, die Position q'' eine Gewinnposition i. w. S. des Spielers A; also wäre nach dem Hilfssatze Ib. auch die Position q' eine Gewinnposition i. w. S. des A, könnte also nicht eine Position des Spiels R sein. Man sieht also, dass R eine Nichtverlusttaktik i. e. S. des B ist; da nach der Voraussetzung q' eine Position des Spiels R ist, so ist q' keine Verlustposition des B. Also ist Satz III., also auch Satz II. und IV. bewiesen.

Man bemerke noch, dass die Nichtverlusttaktik i. e. S. R von der Position q' unabhängig ist, also, dass es eine universelle Taktik i. e. S. gibt, durch welche B in jeder Position, in der das überhaupt möglich ist, den Verlust verhindern kann.

Ich habe beim Beweise des Satzes III. von den Eigenschaften der Menge der Gewinnpositionen i. w. S. nur diejenigen benützt, die in den Hilfssätzen Ia. und Ib. ausgesprochen wurden; also gilt der Satz III. für alle Positionen q_0, die statt keine Gewinnposition i. w. S. des A zu sein, einer gewissen Menge $\mathfrak{M}$ der Positionen, die *auch* diese Eigenschaften besitzt, nicht angehören. Anders gesagt, die Menge der Verlustpositionen i. e. S. des B, oder, was nach den Sätzen IV. und II. dasselbe bedeutet, die Menge der Gewinnpositionen i. w. S. des A ist Untermenge einer jeden solchen Menge $\mathfrak{M}$. Also gilt der

Satz V. *Es sei eine Menge $\mathfrak{M}$ von Positionen des Spiels S so beschaffen, dass jede Position q_0, die der folgenden Bedingung* *genügt, in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Ist bei q_0 der Spieler* A *am Zuge, so soll* w e n i g s t e n s e i n *Zug, ist bei q_0* B *am Zuge, so soll* j e d e r *Zug $q_0 \to q_0'$ zu einer Position q_0' führen, die ein Element der Menge $\mathfrak{M}$ ist. Dann ist jede Gewinnposition i. w. S. in der Menge $\mathfrak{M}$ enthalten.*

Nach dem Satze IV. darf man den Zusatz i. e. S. oder i. w. S. nach „Verlustposition" fortlassen; ich werde den Zusatz i. w. S. auch nach „Gewinnposition" „Taktik" usw. fortlassen, also sollen diese Begriffe, wenn nicht i. e. S. hinzufügt wird, immer i. w. S. verstanden werden.

II.

7. Ich werde jetzt den in der Einleitung besprochenen Satz über Gewinn ohne Wiederholung formulieren und beweisen. Ich nenne eine Partie

$$q_0, q_1, q_2, \ldots$$

eine *Partie ohne Wiederholung* (kurz: o. W.), wenn je zwei der Positionen $q_0, q_1, q_2, \ldots$ verschieden sind. Eine Taktik $\mathfrak{T}$ des A im Spiele S von der Beschaffenheit, dass jede Partie gemäss S, in welcher A die Taktik $\mathfrak{T}$ befolgt, o. W. ist, nenne ich eine Taktik o. W.

Es sei q eine Gewinnposition des Spielers A. Ich sage, dass A in der Position q *o. W. auf Gewinn steht,* oder, dass q eine *Gewinnposition o. W. des* A ist, wenn es für ihn eine Gewinntaktik o. W. $\mathfrak{T}$ gibt derart, dass q eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ ist. Eine Gewinnposition i. e. S. q ist immer eine Gewinnposition o. W.; ist nämlich T eine Gewinntaktik i. e. S. des A, so ist ihr Schriftspiel $\mathfrak{T}$ eine Gewinntaktik o. W. In der Tat, wäre

$$q_0, q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_l, q_k, \ldots$$

eine gemäss T gespielte Partie *mit* Wiederholung, so wäre

$$q_k, q_{k+1}, \ldots, q_l, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_l, q_k, q_{k+1}, \ldots$$

auch eine Partie gemäss T, und zwar eine Remispartie, entgegen der Voraussetzung, dass T ein Gewinnspiel ist.

Das war eine evidente Folge der Definition der Gewinnposition i. e. S.; ich werde aber dasselbe auch für jede Gewinnposition i. w. S. beweisen. Dazu brauche ich den folgenden

H i l f s s a t z II. *Befolgt der Spieler* A *in der Partie $\mathfrak{p}$ eine Gewinntaktik o. W. $\mathfrak{T}$, so ist jede Position q, die in $\mathfrak{p}$ vorkommt, eine Gewinnposition o. W.*

Beweis. Nach der Voraussetzung hat eine Position des Spiels $\mathfrak{T}$ die Form

$$q_0, q_1, \ldots, q_n, q,$$

kurz: $[\mathfrak{q}, q]$, wo $\mathfrak{q}$ den Partieanfang $q_0, q_1, \ldots, q_n$ bezeichnet. Betrachten wir alle Positionen des Spiels $\mathfrak{T}$, die mit $\mathfrak{q}$ beginnen (ausser $\mathfrak{q}$ selbst) und lassen wir bei einer jeden solchen den Anfang $\mathfrak{q}$ fort. Die so entstehenden Partieanfänge sollen die Positionen eines neuen Spiels $\mathfrak{T}'$ sein. In einer Position $\mathfrak{q}_0$ soll im Spiele $\mathfrak{T}'$ derselbe Spieler am Zuge sein, wie in $\mathfrak{T}$ bei der Position $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_0]$[18]; ein Zug $\mathfrak{q}_1 \rightarrow \mathfrak{q}_2$ soll in $\mathfrak{T}'$ dann und nur dann als regelrecht gelten, wenn $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1] \rightarrow [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_2]$ in $\mathfrak{T}$ regelrecht ist. Aus der Taktikeigenschaft des Spiels $\mathfrak{T}$ folgt die des Spiels $\mathfrak{T}'$; wenn A in einer Partie $\mathfrak{p}$ die Taktik $\mathfrak{T}'$ befolgt, so ist $[\mathfrak{q}, \mathfrak{p}]$ eine Partie, in der A die Taktik $\mathfrak{T}$ befolgt, also ist $\mathfrak{T}'$, wie $\mathfrak{T}$, eine Gewinntaktik o. W. Nun ist aber q eine Position des Spiels $\mathfrak{T}'$, also ist die Behauptung bewiesen.

8. Nun beweise ich den

Satz VI. *Steht der Spieler* A *in einer Position q_0 auf Gewinn, so ist q_0 eine Gewinnposition o. W. des* A

Beweis. Nach dem Satze V. genügt es nur den folgenden Hilfssatz zu beweisen.

Hilfssatz III. *a) Ist bei einer Position q_0 der Spieler* A *am Zuge und kann er einen regelrechten Zug $q_0 \rightarrow q_0'$ wählen derart, dass er in der nächsten Position q_0' auf Gewinn o. W. steht, so steht er bereits in q_0 auf Gewinn o. W.*

b) Ist bei einer Position q_0 der Spieler B *am Zuge und steht sein Gegner* A, *wie auch* B *den regelrechten Zug $q_0 \rightarrow q_0'$ wählen mag, in der nächsten Position q_0' auf Gewinn o. W., so steht* A *bereits in q_0 auf Gewinn o. W.*

Beweis. Ich werde ganz analog verfahren, wie bei den Beweisen der Hilfssätze Ia. und Ib. Es bezeichne also $\mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{T}(q_0')$ die zur Position q_0' bzw. zu den Positionen q_0' gehörigen Gewinntaktiken o. W.; man adjungiere zum Spiele $\mathfrak{T}$ den Zug $q_0 \rightarrow q_0'$, bzw. man adjungiere zu jedem der Spiele $\mathfrak{T}(q_0')$ den entsprechenden Zug $q_0 \rightarrow q_0'$ und man addiere die so entstehenden Spiele. Man erhält dann in beiden Fällen ein Spiel $\mathfrak{T}_0$, der, wie

[18]) So bezeichne ich den Partieanfang, welcher mit $\mathfrak{q}$ beginnt und dann sich mit $\mathfrak{q}_0$ fortsetzt.

in 5. schon gezeigt wurde, eine Gewinntaktik des A ist. Wenn nun $\mathfrak{T}_0$ eine Taktik o. W. ist, so ist alles bewiesen, da q_0 eine Position des Spiels $\mathfrak{T}_0$ ist. Andernfalls gibt es eine Partie *mit* Wiederholung, in der A die Taktik $\mathfrak{T}_0$ befolgt. Diese Partie hat aber die Form $[q_0, \mathfrak{p}]$, wo A in der Partie $\mathfrak{p}$ eine Gewinntaktik o. W. (nämlich $\mathfrak{T}$, bzw. eine der $\mathfrak{T}(q_0')$) befolgt, also $\mathfrak{p}$ eine Partie o. W. ist. Daher muss die Position q_0 in $\mathfrak{p}$ vorkommen, also ist sie nach dem Hilfssatze II. eine Gewinnposition o. W.

III.

9. Es sei α vorläufig eine natürliche Zahl, inclusive Null. Eine Gewinntaktik $\mathfrak{T}$ des A nenne ich eine *Gewinntaktik höchstens von der Ordnung* α, wenn jede Partie, in welcher A die Taktik $\mathfrak{T}$ befolgt, aus weniger als $\alpha+1$ Zugpaaren (d. h. höchstens aus $2\alpha+1$ Zügen) besteht. Eine Position q des Spiels S heisst eine *Gewinnposition des* A *von der Ordnung* α, wenn es eine Gewinntaktik des Spielers A höchstens von der Ordnung α, aber keine höchstens von der Ordnung $\alpha-1$ gibt, von welchem q (als nullzügiger Partieanfang) eine Position ist.

Es sei q eine Gewinnposition des A von der Ordnung α. Ist bei q der Spieler A am Zuge, so kann er durch einen regelrechten Zug $q \to q'$ eine Gewinnposition q' von der Ordnung α herbeiführen. Dazu hat er nämlich den Zug $q \to q'$ so zu wählen, dass derselbe der zu q gehörigen Gewinntaktik $\mathfrak{T}$ höchstens von der Ordnung α entspreche, d. h. der Zug $q \to [q, q']$ in $\mathfrak{T}$ regelrecht sei. Die zu q' gehörige Gewinntaktik $\mathfrak{T}'$ höchstens von der Ordnung α konstruiert man, wie folgt. Betrachten wir diejenigen Positionen des Spiels $\mathfrak{T}$, welche die Form $[q, \mathfrak{q}]$ haben, dann sind die $\mathfrak{q}$ die Positionen des Spiels $\mathfrak{T}'$. Die Spielregeln des Spiels $\mathfrak{T}'$ sollen analog definiert werden, wie beim Beweise des Hilfssatzes II.: bei der Position $\mathfrak{q}$ ist derselbe Spieler am Zuge, wie bei $[q, \mathfrak{q}]$ im Spiele $\mathfrak{T}$; ein Zug $\mathfrak{q}_1 \to \mathfrak{q}_2$ ist in $\mathfrak{T}'$ dann und nur dann regelrecht, wenn der Zug $[q, \mathfrak{q}_1] \to [q, \mathfrak{q}_2]$ in $\mathfrak{T}$ regelrecht ist. $\mathfrak{T}'$ ist eine Taktik des A; befolgt A in einer Partie $\mathfrak{p}$ die Taktik $\mathfrak{T}'$, so befolgt er in der Partie $[q, \mathfrak{p}]$ die Taktik $\mathfrak{T}$; also ist auch $\mathfrak{T}'$ eine Gewinntaktik höchstens von der Ordnung α. Und es gibt keine Gewinntaktik $\mathfrak{T}$ höchstens von der Ordnung $\alpha-1$, von welchem q' eine Position ist: denn aus $\mathfrak{S}$ würde durch Adjunktion des Zuges $q \to q'$ (vgl. den Beweis des Hilfssatzes Ia.) eine Gewinntaktik $\mathfrak{T}'$ höchstens von der Ordnung

$\alpha - 1$ entstehen und q wäre eine Position des Spiels $\mathfrak{T}'$. Eine analoge Schlussweise zeigt, dass, wenn in der Gewinnposition q des A von der Ordnung α der Spieler B am Zuge ist, so führt jeder regelrechte Zug $q \rightarrow q'$ des B eine Gewinnposition q' von einer Ordnung $< \alpha$ herbei.

Der Begriff einer Gewinnposition von der Ordnung α lässt sich also auch durch vollständige Induktion, wie folgt, definieren.

B_0) Eine Position q, bei welcher B am Zuge ist, heisst *eine Gewinnposition* 0-*ter Ordnung* (*des Spielers* A), wenn sie ein Matt für B ist.

A_0) Eine Position q, bei welcher A am Zuge ist, heisst *eine Gewinnposition* 0-*ter Ordnung*, wenn es einen regelrechten Zug $q \rightarrow q'$ gibt derart, dass q' ein Matt für B ist.

B_α) Eine Position q, bei welcher B am Zuge ist, heisst *eine Gewinnposition von der Ordnung* α, wenn sie keine Gewinnposition von einer Ordnung $< \alpha$ ist, und wenn für jeden regelrechten Zug $q \rightarrow q'$ die Position q' von einer Ordnung $< \alpha$ ist.

A_α) Eine Position q, bei welcher A am Zuge ist, heisst *eine Gewinnposition von der Ordnung* α, wenn sie keine Gewinnposition von einer Ordnung $< \alpha$ ist, und wenn es einen regelrechten Zug $q \rightarrow q'$ gibt derart, dass die Position q' von der Ordnung α ist.

Dass diese Definition mit den früheren äquivalent ist, folgt aus den obigen Überlegungen, wenn man noch bemerkt, dass, falls q nach der letzteren Definition eine Gewinnposition des A von der Ordnung α ist, das Schriftspiel der folgenden Gewinntaktik i. e. S. T des A eine Gewinntaktik höchstens von der Ordnung α ist. Die Positionen des Spiels T sollen sämtliche Gewinnpositionen des A von einer Ordnung $\leq \alpha$ (im Spiele S, nach der letzteren Definition) sein mit der „natürlichen", d. h. aus S übertragenen Bestimmung des am Zuge befindlichen Spielers; ein in S regelrechter Zug $q_1 \rightarrow q_2$, wo q_1, q_2 Positionen des Spiels T sind, soll in T dann und nur dann als regelrecht gelten, wenn die Ordnungszahl der Position q_2 nicht grösser ist, als die der Position q_1.

10. Nun steht es gar nichts im Wege, die letztere Definition als eine Definition mittels transfiniter Induktion zu betrachten; also ist der Begriff einer Gewinnposition des A von der Ordnung α für eine beliebige, auch transfinite Ordnungszahl α definiert. Man sieht leicht (durch „Auflösung der Induktion"), dass dieser Begriff für die einfachsten transfiniten Ordnungszahlen ω, $\omega+endlich$, $\omega.2$ die in der Einleitung angegebene Bedeutung hat.

Eine „Gewinnposition des A von einer Ordnung α" ist wirklich eine Gewinnposition des A, und zwar i. e. S. Es lässt sich sogar eine universelle Gewinntaktik G_A i. e. S. des A angeben derart, dass jede Gewinnposition von irgendeiner Ordnung α[19]) eine Position des Spiels G_A sei. Die Positionen des Spiels sind nämlich eben diese „mit einer Ordnungszahl versehenen" Gewinnpositionen des A mit der „natürlichen" Bestimmung des am Zuge befindlichen Spielers; ein in S regelrechter Zug $q_1 \rightarrow q_2$ gilt in G_A dann und nur dann als regelrecht, wenn die Ordnungszahl der Position q_2 nicht kleiner ist, als die Ordnungszahl der Position q_1. G_A ist ein Gewinnspiel des A, da bei einer gemäss G_A gespielten Partie

$$q_0, q_1, q_2, \ldots$$

die Ordnungszahlen der nacheinander folgenden Positionen

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

nie wachsen und bei jedem Zuge des B (wegen B_α)) abnehmen, also eine endliche Folge bilden; die letzte Position q_n ist dann ein Matt, und zwar für B, da wegen A_α) eine Mattposition für A nie mit einer Ordnungszahl versehen ist. Ausserdem folgt aus B_α), dass G_A eine Taktik i. e. S. des A ist.

Nun gilt aber auch die Umkehrung der eben bewiesenen Behauptung, ja sogar der

Satz VII. *Für jede Gewinnposition q (i. w. S.) des* A *gibt es eine Ordnungszahl α derart, dass q eine Gewinnposition von der Ordnung α ist.*

Beweis. Nach dem Satze V. genügt es, folgende beide Behauptungen zu erweisen.

a) Ist bei einer Position q_0 der Spieler A am Zuge und gibt

---

19) Hier (und auch einigemal noch unten) steckt eigentlich eine Verwendung des Begriffes: *Gesamtheit sämtlicher Ordnungszahlen*, aber nur in einer harmlosen (d. h. auch vom Gesichtspunkte der axiomatischen Mengenlehre keine Schwierigkeiten machenden) Form, nämlich, in der Terminologie des Herrn J. v. Neumann (Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 27. (1928), S. 669—752): nicht als „Menge", sondern nur als „Bereich". Übrigens könnte ich mich, wenn ich mich auf den Wohlordnungssatz des Herrn Zermelo berufen wollte, von vorherein auf die Menge derjenigen transfiniten Ordnungszahlen beschränken, deren Kardinalzahl nicht grösser ist, als die der Menge sämtlicher Positionen des Spiels S. (Vgl. Satz IX.)

es einen regelrechten Zug $q_0 \rightarrow q_0'$ derart, dass q_0' eine Gewinnposition des A von einer Ordnung α ist, so ist auch q_0 eine Gewinnposition des A von einer gewissen Ordnung β.

b) Ist bei einer Position q_0 der Spieler B am Zuge und ist, für jeden regelrechten Zug $q_0 \rightarrow q_0'$, die Position q_0' eine Gewinnposition des A von einer Ordnung $\alpha = \alpha(q_0')$, so ist auch q_0 eine Gewinnposition des A von einer gewissen Ordnung β.

Zu *a*). Nach A_α) ist die Position q_0, wenn sie keine Gewinnposition des A von einer Ordnung $< \alpha$ ist, eine Gewinnposition des A von der Ordnung α.

Zu *b*). Es bezeichne α^* die (nach der Theorie der transfiniten Zahlen stets existierende) kleinste Ordnungszahl. die grösser ist, als jede der $\alpha(q_0')$; dann ist nach B_α) die Position q_0, wenn sie keine Gewinnposition des A von einer Ordnung $< \alpha^*$ ist, eine Gewinnposition von der Ordnung α^*.

Als Corollar ergibt sich der

Satz VIII. *Gewinnposition i. e. S. und i. w. S. bedeuten dasselbe.*

11. Es sei das Spiel S so beschaffen, dass für jede Position q des Spiels S die Mächtigkeit der Menge sämtlicher regelrechter Züge von der Form $q \rightarrow q'$ kleiner ist, als eine gewisse transfinite Kardinalzahl μ.[20] Dann gilt der Satz VII. in der schärferen Fassung:

Satz IX. *Ist q eine Gewinnposition des* A *im Spiele S, so gibt es eine Ordnungszahl $\alpha < \mu$*[21]*) derart, dass q eine Gewinnposition von der Ordnung α ist.*

Beweis. Sonst gäbe es wenigstens eine Ordnungszahl $\alpha \geqq \mu$ derart, dass eine Position des Spiels S eine Gewinnposition des A von der Ordnung α ist; β bezeichne die kleinste dieser Ordnungszahlen. Nach A_α) gibt es dann jedenfalls eine Gewinnposition q_0 des A von der Ordnung β, bei welcher B am Zuge ist. Nach B_α) ist, wie auch der regelrechte Zug $q_0 \rightarrow q_0'$ gewählt wird, q_0' eine Gewinnposition von einer Ordnung $\alpha = \alpha(q_0') < \beta$; also ist, nach

---

[20]) Nach dem Wohlordnungssatze des Herrn Zermelo gibt es jedenfalls eine solche transfinite Kardinalzahl μ.

[21]) Ich bezeichne mit μ nicht nur eine *Kardinalzahl*, sondern auch die zugehörige *Anfangszahl:* es ist ja, wie aus den axiomatischen Untersuchungen des Herrn v. Neumann (vgl. a. a. O.[19]), S. 731.) besonders hervortritt, bequem, diese beiden Begriffe als *identisch* zu betrachten. Also bedeutet $\alpha < \mu$, dass die Kardinalzahl von α kleiner als μ ist.

der Definition von β, $\alpha(q_0') < \mu$. Da aber, nach der Voraussetzung, die Mächtigkeit der Menge sämtlicher $\alpha(q_0')$ kleiner als μ ist, gibt es bekanntlich eine Ordnungszahl $\alpha^* < \mu$, die grösser ist, als jede der $\alpha(q_0')$; nach B_α) ist die zur Gewinnposition q_0 gehörige Ordnungszahl $\beta \leq \alpha^*$, was der Voraussetzung $\beta \geq \mu$ widerspricht.

Als Speziellfall $\mu = \omega$[22]) ergibt sich der in der Einleitung ausgesprochene Satz des Herrn König.

12. Aus dem Vorigen ergibt sich, wenn man auch die durch Vertauschung der Rolle der Spieler A und B (wodurch auch die Verlustpositionen des A je eine Ordnungszahl erhalten) sich ergebenden Sätze berücksichtigt, folgendes.

a) Jede Position des Spiels S gehört entweder zur Menge $\mathfrak{G}_A$ der Gewinnpositionen des Spielers A, oder zur Menge $\mathfrak{G}_B$ der Gewinnpositionen des Spielers B, oder aber zur Menge $\mathfrak{R}$ der Remispositionen, d. h. der Positionen, in denen sowohl A, als auch B imstande ist, den Verlust durch je eine geeignete Nichtverlusttaktik zu verhindern.

b) Es gibt je eine, nur vom Spiele S abhängige Gewinntaktik (sogar in engerem Sinne) G_A, bzw. G_B (Vgl. **10.**), durch welche A, bzw. B in jeder Position, die zur $\mathfrak{G}_A$, bzw. $\mathfrak{G}_B$ gehört, den Gewinn erzwingen kann. Es gibt eine, nur vom Spiele S abhängige Nichtverlusttaktik (sogar in engerem Sinne) R_A, bzw. R_B (letztere wurde in **6.** eingeführt und mit R bezeichnet), durch welche A, bzw B in jeder zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Position den Verlust vermeiden kann.

c) Man kann den Wert einer Gewinnposition des A, oder B durch eine (endliche oder transfinite) Ordnungszahl ausdrücken, welche gewissermassen den Abstand vom Matt misst. Man betrachtet sinngemäss zwei Gewinn- oder Verlustpositionen des einen Spielers mit derselben Ordnungszahl, sowie zwei Remispositionen immer als für diese Spieler gleichwertig, eine Gewinnposition mit der kleineren Ordnungszahl besser, als eine mit der grösseren, diese wiederum besser, als irgendeine Remisposition, diese besser, als eine Verlustposition und endlich von zwei Verlustpositionen die mit der grösseren Ordnungszahl besser, als die mit der kleineren.

d) Aus keiner Position kann der am Zuge befindliche Spieler

[22]) Hier bezeichnet also, laut der Fussnote [21]), ω auch die abzählbare Mächtigkeit.

in eine für ihn bessere durch einen regelrechten Zug übergehen[23]): die „Verbesserung" der Position erfolgt immer durch einen (eventuell, wenn nämlich der Gegner schon auf Verlust steht, erzwungenen) „Fehlzug" des Gegners; also ist jedes Spiel ein „Kampf von Fehlern gegen Fehler". (Vgl. für Gewinn- und Verlustpositionen des am Zuge befindlichen Spielers A_α) und B_α), für Remispositionen Hilfssatz Ia.)

e) Aus einer Gewinn- oder Remisposition kann man in eine gleichwertige übergehen (vgl. A_α), bzw. Hilfssatz Ib.) Einen Zug, der dies erzielt, kann man sinngemäss als einen „guten", „bestmöglichen" Zug bezeichnen. Für eine Gewinnposition gibt die bestmöglichen Züge die Gewinntaktik G_A bzw. G_B, für eine Remisposition die Nichtverlusttaktik R_A bzw. R_B an. In einer Verlustposition gibt es nur schlechte Züge: man *muss* in eine schlechtere Position übergehen. (Vgl. B_α).)

f) Ist die Ordnungszahl α einer Verlustposition q keine Limeszahl, so gibt es für den auf Verlust stehenden Spieler doch wenigstens einen Zug, den man als einen „am wenigsten schlechten" Zug bezeichnen kann: nämlich einen Zug, der eine Position mit der Ordnungszahl $\alpha - 1$ herbeiführt. (Denn gäbe es keinen solchen Zug, so wäre nach B_α) die zur Position q gehörige Ordnungszahl $\leqq \alpha - 1$). Ist aber die Ordnungszahl einer Verlustposition eine Limeszahl, so gibt es augenscheinlich zu jedem Zuge einen anderen, der weniger schlecht ist.

(*Eingegangen am 22. Mai 1928*)

---

[23]) Für Gewinnpositionen des am Zuge befindlichen Spielers ist das allerdings nur eine Bezeichnungssache.