Zur Charakteristikentheorie.

Von ALFRED HAAR in Szeged.

Einleitung.

Um die in der vorliegenden Note behandelte Frage zu beleuchten, wollen wir einige kritische Bemerkungen über die klassische Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$F(p,q,z,x,y)=0 \tag{I}$$

vorausschicken, wo — wie üblich — die ersten Ableitungen der unbekannten Funktion $z(x,y)$ nach x bzw. y mit p bzw. q bezeichnet wurden. Um Schwierigkeiten, an die es hier nicht ankommt, vorzubeugen, wollen wir annehmen, dass alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion $F(p,q,z,x,y)$ für die in Betracht kommenden Wertsysteme stetige Funktionen der fünf Argumente sind.

Vermöge der Charakteristikentheorie wird der Gleichung (I) das folgende System von 5 gewöhnlichen Differentialgleichungen zugeordnet:[1])

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=F_p,\quad \frac{dy}{dt}=F_q,\quad \frac{dz}{dt}=pF_p+qF_q,\\&\frac{dp}{dt}=-(F_x+pF_z),\quad \frac{dq}{dt}=-(F_y+qF_z),\end{aligned} \tag{II}$$

und man interpretiert die die Bedingung $F(p,q,z,x,y)=0$ erfüllenden Lösungen von (II) als die charakteristischen Streifen von (I). Die Grundlage der Charakteristikentheorie ist die folgende Tatsache:

Ist $z=\varphi(x,y)$ eine Lösung von (I), *deren Ableitungen zweiter Ordnung in einer Umgebung der Stelle x_0, y_0 existieren,*

[1]) Wir bezeichnen — wie üblich — die partiellen Ableitungen einer Funktion durch Hinzufügung der entsprechenden Indizes.

$$z_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad p_0 = \varphi_x(x_0, y_0), \quad q_0 = \varphi_y(x_0, y_0),$$

sind ferner die Ableitungen zweiter Ordnung von $F(p, q, z, x, y)$ stetige Funktionen in der Umgebung der Stelle x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, so dass die Gleichungen (II) *eine Lösung $x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)$ besitzen, für die*

$$x(0) = x_0, \; y(0) = y_0, \; z(0) = z_0, \; p(0) = p_0, \; q(0) = q_0$$

ist, so ist für hinreichend kleine $|t|$

$$z(t) = \varphi(x(t), y(t)), \; p(t) = \varphi_x(x(t), y(t)), \; q(t) = \varphi_y(x(t), y(t)),$$

d. h. die betrachtete Lösung von (I) *„enthält" den charakteristischen Streifen, den die Lösungen von* (II) *definieren.*

Auf diesen Satz stützt sich die Integrationstheorie von (I), die natürlich auch einen Existenzbeweis für die Lösbarkeit dieser Gleichung liefert, und zwar den allgemeinsten der überhaupt gegeben wurde. Ich betone noch, dass *die Existenz der zweiten Ableitungen von $\varphi(x, y)$* bei dem Beweise des obigen Satzes *unerlässlich ist;* diese Tatsache ist in verschiedenen Lehrbüchern — auch in den allerneusten — oft übersehen worden und führte daher zu Schlüssen (beispielsweise über die Unizität der Lösungen von (I)), die nicht statthaft sind.

Wir bezeichnen mit

$$\begin{gathered} x = x(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \; y = y(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ z = z(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \; p = p(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ q = q(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \end{gathered} \tag{III}$$

diejenigen Lösungen von (II), die für $t = 0$ bzw. in x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 übergehen. Unter der gemachten Annahme, dass alle zweiten Ableitungen von F in einer Umgebung *(U)* der Stelle x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 stetige Funktionen sind, existieren *alle* ersten Ableitungen der obigen Funktionen (III) nach den Veränderlichen $t, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0$ in einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle.

Um den Hauptsatz dieser Theorie in exakter Weise formulieren zu können, betrachten wir eine Kurve im x, y, z-Raume

$$x = \bar{x}(\tau), \quad y = \bar{y}(\tau), \quad z = \bar{z}(\tau), \tag{IV}$$

wo $\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau)$ in einem Intervall $\tau' \leqq \tau \leqq \tau''$ stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, und bestimmen einen hindurchgehenden Streifen, indem wir $\bar{p}(\tau)$ und $\bar{q}(\tau)$ aus den Gleichungen

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{p}\,\frac{d\bar{x}}{d\tau} + \bar{q}\,\frac{d\bar{y}}{d\tau}, \quad F(\bar{p}, \bar{q}, \bar{z}, \bar{x}, \bar{y}) = 0 \tag{IV'}$$

berechnen; wir nehmen an, dass diese Berechnung möglich ist, und dass man solche stetige Funktionen $\overline{p}(\tau)$, $\overline{q}(\tau)$ gewinnt, dass der Wertevorrat der 5 Funktionen $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q}$ (für die betrachteten Werte von τ) in der obigen Umgebung (U) liegt.

Alsdann sind

$$\begin{aligned} X(t, \tau) &= x(t; \overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau), \overline{z}(\tau), \overline{p}(\tau), \overline{q}(\tau)), \\ Y(t, \tau) &= y(t; \overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau), \overline{z}(\tau), \overline{p}(\tau), \overline{q}(\tau)), \\ Z(t, \tau) &= z(t; \overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau), \overline{z}(\tau), \overline{p}(\tau), \overline{q}(\tau)) \end{aligned}$$

(für die betrachteten Werte von t und τ) jedenfalls stetige Funktionen der beiden Variablen, die in Bezug auf t differenzierbar sind und das Gleichungssystem (II) befriedigen. Wenn ferner weder der Streifen

$$x = \overline{x}(\tau), \quad y = \overline{y}(\tau), \quad z = \overline{z}(\tau), \quad p = \overline{p}(\tau), \quad q = \overline{q}(\tau),$$

noch irgendein Teil desselben charakteristisch ist, so stellt

$$x = X(t, \tau), \quad y = Y(t, \tau), \quad z = Z(t, \tau) \tag{V}$$

eine Fläche dar, da die Parameterlinien $t =$ konst. und $\tau =$ konst. verschieden sind. *Unter der weiteren Annahme, dass X, Y, Z auch nach τ differenzierbar sind,* kann man auf eine sinnreiche (von Cauchy herrührende) Weise zeigen, dass die Fläche (V) eine (die Kurve (IV) enthaltende) Lösung der vorgelegten Gleichung (I) darstellt. Um die Existenz dieser Ableitungen zu sichern, muss man — da die in (III) vorkommenden Funktionen nach allen Veränderlichen differenzierbar sind — eine Annahme über $\overline{p}(\tau)$, $\overline{q}(\tau)$ machen, etwa die Differenzierbarkeit dieser Funktionen. Da diese Funktionen aus (IV') berechnet wurden, so ist diese Bedingung erfüllt, falls $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ *zweimal stetig differenzierbare* Funktionen sind. Man gewinnt also den Satz, dass *falls die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, $\overline{x}(\tau)$, $\overline{y}(\tau)$, $\overline{z}(\tau)$ aber zweimal stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, die keine Charakteristik darstellen, so besitzt die vorgelegte Gleichung* (I) *eine Lösung $z = \varphi(x, y)$ für die*

$$\overline{z}(\tau) = \varphi(\overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau))$$

ist.

In den üblichen Darstellungen dieser Theorie wird häufig die zweimalige Differenzierbarkeit der gegebenen Kurve (IV) ausser Acht gelassen und man begnügt sich mit der Annahme, dass

$\overline{x}(\tau)$, $\overline{y}(\tau)$, $\overline{z}(\tau)$ einmal differenzierbare Funktionen sind. Freilich ist dieser Schluss anfechtbar, da man daraus nicht schliessen kann, dass die aus (IV′) berechneten Funktionen $\overline{p}(\tau)$, $\overline{q}(\tau)$ differenzierbar sind, folglich, dass die durch die Charakteristikentheorie gelieferte Fläche (V) Ableitungen besitzt. Daher kann auch keine Rede davon sein, dass diese Fläche eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (I) darstellt. Dies ist ein bemerkenswerter Umstand; obwohl die vorgelegte Differentialgleichung nur Ableitungen erster Ordnung enthält, *so genügt für die vorgelegte Kurve die Forderung der einmaligen Differenzierbarkeit nicht* um stets zu einer Lösung zu gelangen, wenigstens nicht auf den durch die Charakteristikentheorie gelieferten Weg.

Dadurch wird nun die Frage nahe gelegt, ob dieser Umstand im Wesen des Problems liegt oder nur eine Eigenschaft der Behandlungsweise (durch die geschilderte Charakteristikentheorie) ist? Es handelt sich also um die Frage, ob es Lösungen der Differentialgleichung (I) gibt, die durch die Charakteristikentheorie nicht geliefert werden können; solche Lösungen können allerdings nicht zweimal differenzierbar sein, was aber auch gar nicht nötig ist.

Die vorliegende Note enthält das Resultat, dass die aufgeworfene Frage verneinend zu beantworten ist für eine sehr allgemeine Klasse von Differentialgleichungen (I). Die Grundidee unseres Beweises kann natürlich nicht aus der Charakteristikentheorie entspringen; es müssen allgemeinere, umfassendere Sätze über die Lösungen von (I) gewonnen werden um zu diesem Satz zu gelangen; diese sollen im § 1 entwickelt werden.

§ 1. **Hülfssätze.**[2])

Die Grundlage unserer Betrachtungen ist das folgende

L e m m a. *Es sei $z(x,y)$ eine im Dreieck*

$$x \geq 0,\ y \geq (x-x'),\ y \leq -(x-x''),\ (x'' > x')$$

definierte Funktion, deren erste Ableitungen nach x und y (die wir mit p und q bezeichnen) daselbst stetige Funktionen sind, und es

2) [Anmerkung während der Korrektur.] Die in diesem §. gewonnenen Sätze schliessen sich unmittelbar an die Resultate an, die ich kürzlich in den *Comptes Rendus* (2. Juli 1928) veröffentlicht habe. („Sur l'unicité des solutions....“). Vgl. auch insbesondere die anschliessenden Bemerkungen von Herrn HADAMARD.

sei für jede Stelle dieses Gebietes

$$|q| \leqq |p| + |z|. \qquad (U)$$

Ist M der Maximalwert der Funktion $|z(x, y)|$ längs der Seite $y = 0$ des Dreiecks, d. h.

$$|z(x, 0)| \leqq M, \quad \text{für} \quad x' \leqq x \leqq x'',$$

so ist an jeder Stelle des betrachteten Dreiecks

$$|z(x, y)| \leqq Me^{y}.$$

In der Tat, würde es eine Stelle (x_0, y_0) innerhalb dieses Dreiecks oder auf der Peripherie desselben geben, wo etwa

$$z(x_0, y_0) > Me^{y_0}$$

wäre, so wäre auch für hinreichend kleine positive δ

$$z(x_0, y_0) > Me^{(1+\delta)y_0}$$

Wir denken uns eine positive Grösse δ von dieser Beschaffenheit fixiert und betrachten die Funktion

$$Z(x, y) = e^{-(1+\delta)y} z(x, y),$$

die ebenfalls im obigen Dreieck definiert ist und ihr Maximum jedenfalls nicht auf der Geraden $y = 0$ annimmt, da ja für $y = 0$

$$Z(x, 0) = z(x, 0) \leqq M,$$

für $x = x_0$, $y = y_0$ aber

$$Z(x_0, y_0) > M$$

ist. Es sei x_1, y_1 diejenige Stelle, wo $Z(x, y)$ ihren Maximalwert (der also $> M$ ist) annimmt. Da dieser Punkt nicht auf der Geraden $y = 0$ liegen kann, so ist jedenfalls für hinreichend kleine positive h

$$Z(x_1, y_1) \geqq Z(x_1 - h,\ y_1 - h),$$

und

$$Z(x_1, y_1) \geqq Z(x_1 + h,\ y_1 - h),$$

da die Punkte $(x_1 - h,\ y_1 - h)$ und $(x_1 + h,\ y_1 - h)$ für hinreichend kleine positive h innerhalb oder auf der Peripherie des betrachteten Dreiecks liegen. Daher ist für $h = 0$

$$\frac{dZ(x_1 - h,\ y_1 - h)}{dh} \leqq 0, \quad \frac{dZ(x_1 + h,\ y_1 - h)}{dh} \leqq 0,$$

d. h. es ist für $x = x_1$, $y = y_1$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} = e^{-(1+\delta)y}(q + p - (1 + \delta)z) \geqq 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} = e^{-(1+\delta)y}(q - p - (1 + \delta)z) \geqq 0.$$

Daraus folgt aber, dass

$$q(x_1, y_1) - |p(x_1, y_1)| \geqq (1+\delta)\, z(x_1, y_1)$$

ist; diese Ungleichung liefert aber in Verbindung mit der angenommenen Ungleichung *(U)* — aus der unmittelbar

$$q - |p| \leqq |z(x, y)|$$

folgt — die Ungleichung

$$|z(x_1, y_1)| \geqq (1+\delta)\, z(x_1, y_1).$$

Diese Ungleichung ist aber mit $\delta > 0$ und $z(x_1, y_1) > 0$ im Widerspruch; die letzte Ungleichung muss statthaben, da ja

$$Z(x_1, y_1) = e^{-(1+\delta) y_1} z(x_1, y_1) > M \geqq 0$$

ist. In genau derselben Weise zeigt man die Unmöglichkeit der Ungleichung

$$z(x_0, y_0) < -M e^{y_0},$$

womit unser Lemma bewiesen ist.

Der soeben bewiesene Satz ist einer geringen Verallgemeinerung fähig, wenn man an Stelle der Veränderlichen x, y durch die Relationen

$$x = A\overline{x}, \quad y = B\overline{y}$$

(wobei A und B positive Konstanten bedeuten) neue Variable einführt. Man erhält auf diese Weise — wenn man zur Abkürzung $\frac{B}{A} = L$ einführt — den folgenden Satz:

Es sei $z(x, y)$ eine im Dreieck

$$y \geqq 0, \quad y \geqq \frac{1}{L}(x - x'), \quad y \leqq -\frac{1}{L}(x - x'')$$
$$x' < x'', \quad L > 0$$

definierte Funktion, deren erste Ableitungen nach x und y daselbst stetige Funktionen sind, und es sei für jede Stelle dieses Gebietes

$$|q| \leqq L|p| + B|z|, \qquad (B > 0).$$

Ist M der Maximalwert der Funktion $|z(x,y)|$ längs der Geraden $y = 0$, so ist für jede Stelle des betrachteten Dreiecks

$$|z(x, y)| \leqq M e^{By}.$$

Dieser Satz bleibt offenbar richtig, wenn die Funktion $z\,(x, y)$ nur für solche Stellen des obigen Dreiecks definiert ist, deren

y-Koordinate unterhalb einer positiven Grenze y'' bleibt, d. h. wenn der Definitionsbereich dieser Funktion das durch die Geraden

$$y=0, \quad y=\frac{1}{L}(x-x'), \quad y=-\frac{1}{L}(x-x''), \quad y=y''$$

begrenzte Viereck ist, da der obige Beweis wörtlich auch für diesen Fall gilt.

Wir betrachten nun eine partielle Differentialgleichung von der Form

$$q+f(p,z,x,y)=0 \tag{1}$$

und nehmen an, dass die Funktion $f(p,z,x,y)$ stetig in dem durch die Ungleichungen

$$x' \leqq x \leqq x'', \quad 0 \leqq y \leqq y'', \tag{2'}$$
$$z' \leqq z \leqq z'', \quad p' \leqq p \leqq p'' \tag{2''}$$

definierten Bereich ist, und in Bezug auf die Veränderlichen z und p die Lipschitzsche Bedingung erfüllt:

$$|f(p,z,x,y)-f(\bar{p},\bar{z},x,y)| \leqq L_1|p-\bar{p}|+L_2|z-\bar{z}|, \tag{3}$$

wobei L_1 und L_2 positive Konstante bedeuten. Es seien ferner $z_1(x,y)$ und $z_2(x,y)$ zwei Lösungen der partiellen Differentialgleichung (1), (mit *stetigen* Ableitungen 1. Ordnung,) die für solche Werte von x und y definiert sind, die die Ungleichungen (2′) erfüllen und so beschaffen sind, dass daselbst die Ungleichungen

$$z' \leqq z_1(x,y) \leqq z'', \quad p' \leqq p_1(x,y) \leqq p'',$$
$$z' \leqq z_2(x,y) \leqq z'', \quad p' \leqq p_2(x,y) \leqq p''$$

statthaben, wobei zur Abkürzung

$$p_1=\frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad q_1=\frac{\partial z_1}{\partial y}, \quad p_2=\frac{\partial z_2}{\partial x}, \quad q_2=\frac{\partial z_2}{\partial y}$$

gesetzt wurde. Man erhält durch Subtraktion

$$|q_1-q_2|=|f(p_1,z_1,x,y)-f(p_2,z_2,x,y)|$$
$$\leqq L_1|p_1-p_2|+L_2|z_1-z_2|$$

und das oben gewonnene Resultat angewandt auf die Funktion $z=z_1-z_2$ liefert den folgenden

Satz: *Sind die Voraussetzungen, die wir für die Differentialgleichung* (1) *und für die Lösungen* $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ *derselben gemacht haben, erfüllt, und bezeichnen wir mit* M *das Maximum der Funktion*

$$|z_1(x,0)-z_2(x,0)|$$

für $x' \leqq x \leqq x''$, *so gilt für jede Stelle des durch die Geraden*

$$y=0,\quad y=\frac{1}{L_1}(x-x'),\quad y=-\frac{1}{L_1}(x-x''),\quad y=y'$$

begrenzten Viereckes die Ungleichung

$$|z_1(x,y)-z_2(x,y)| \leqq M e^{L_3 y}.$$

Die Bedeutung dieses Satzes besteht darin, dass man für die Differenz zweier Lösungen von (1) im obigen Viereck eine obere Schranke gewinnt auf Grund der maximalen Abweichung dieser Lösungen längs der Geraden $y=0$. Der Satz enthält die Aussage *über die Stetigkeit der Lösungen als Funktionen-Funktion der Anfangswerte betrachtet,* indem wir als Anfangswerte diejenige Werte betrachten, die die Lösung für $y=0$ annimmt.

Wir haben unseren Satz für Differentialgleichungen von der Form (1) und Anfangswerte längs $y=0$ abgeleitet. Durch eine wohlbekannte Schlussweise kann man dieses Resultat auf Gleichungen von der Form (I) und auf solche Anfangsdaten übertragen, die nicht Charakteristiken von (I) sind.

Es sei noch hervorgehoben, dass die Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung der fraglichen Lösungen nicht vorausgesetzt wurde; unser Satz ist also unabhängig davon, ob diese Lösungen durch die Charakteristikentheorie gewonnen werden können.

§ 2. Anwendung auf die Charakteristikentheorie.

Um den vorangehenden Satz auf die Charakteristikentheorie anzuwenden, nehmen wir der Einfachheit halber an, und um Schwierigkeiten, auf die es hier nicht ankommt, zu vermeiden, dass alle partiellen Ableitungen der in der Differentialgleichung

$$q+f(p,z,x,y)=0 \tag{1}$$

auftretenden Funktion $f(p,z,x,y)$ für alle reellen Werte von p, z, x, y stetig sind, und dass die Ableitungen erster Ordnung dem Betrage nach unterhalb einer positiven Grenze L bleiben. Die Lipschitzsche Bedingung (3) ist dann erfüllt. und es lautet das zugehörige Differentialgleichungssystem der Charakteristiken wie folgt:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=f_p, \quad \frac{dy}{dt}=1, \quad \frac{dz}{dt}=pf_p+q, \\ &\frac{dp}{dt}=-(f_z+pf_z), \quad \frac{dq}{dt}=-(f_y+qf_z). \end{aligned} \tag{4}$$

Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} x=x(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0),\ y=t+y_0,\ z=z(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0), \\ p=p(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0),\ q=q(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0) \end{aligned} \tag{4'}$$

dasjenige Lösungssystem von (4), das für $t=0$ bzw. in x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 übergeht. Die Variable t variiert dabei in einer Umgebung von $t=0$, die natürlich noch von der Wahl von x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 abhängt. Wenn wir aber diese Grössen einer Einschränkung von der Form

$$|x_0|\leqq C,\ |y_0|\leqq C,\ |z_0|\leqq C,\ |p_0|\leqq C,\ |q_0|\leqq C$$

unterwerfen (wo unter C irgendeine positive Konstante zu verstehen ist), so existiert sicherlich eine nur von C abhängende positive Grösse T derart, dass die Funktionen (4′) für $|t|\leqq T$ definiert sind; diese Funktionen sind natürlich nach allen Veränderlichen einmal stetig differenzierbar.

Wir betrachten eine stetig differenzierbare Kurve in der x, z-Ebene; ihre Gleichung sei

$$x=\tau,\ y=0,\ z=\bar{z}(\tau),\quad 0\leqq\tau\leqq\tau'',$$

und konstruieren nach den Vorschriften der Charakteristikentheorie die hindurchgehende Integralfläche von (1), wie folgt: Wir berechnen vorab den durch die Kurve hindurchgehenden Integralstreifen

$$p=\frac{d\bar{z}}{d\tau}=\bar{p}(\tau),\quad q=-f\left(\frac{d\bar{z}}{d\tau}, \bar{z}(\tau), \tau, 0\right)=\bar{q}(\tau);$$

die fragliche Fläche ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x&=x(t;\tau,0,\bar{z}(\tau),\bar{p}(\tau),\bar{q}(\tau))=X(t,\tau) \\ y&=t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ =Y(t,\tau) \\ z&=z(t;\tau,0,\bar{z}(\tau),\bar{p}(\tau),\bar{q}(\tau))=Z(t,\tau). \end{aligned} \tag{5}$$

Bestimmen wir die Grösse C derart, dass für $0\leqq\tau\leqq\tau''$ die Funktionen τ, $\bar{z}(\tau)$, $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ dem Betrage nach kleiner als C ausfallen, so sind die obigen Funktionen (5) für $0\leqq\tau\leqq\tau''$, $0\leqq t\leqq T$ jedenfalls definiert und stellen eine Fläche dar, die die vorgelegte

Kurve (für $t=0$) enthält. Die ersten Ableitungen dieser Funktionen (5) nach t sind stetige Funktionen; wenn auch die ersten Ableitungen nach τ existieren, so stellt die Fläche (5) bekanntlich die gesuchte Integralfläche dar. Hiezu ist jedenfalls hinreichend (nicht notwendig), dass die vorgelegte Kurve, d. h. die Funktion $\bar{z}(\tau)$ zweimal stetig differenzierbar sei, da dann die Differenzierbarkeit von $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ unmittelbar, die Differenzierbarkeit der Funktionen (5) aber aus dem Umstande folgt, dass die Funktionen (4') nach allen Argumenten einmal differenzierbar sind.[3]) Lässt man aber die Annahme über die zweimalige Differenzierbarkeit von $\bar{z}(\tau)$ fallen, so kann es vorkommen — und zwar ist dies als der allgemeine Fall zu betrachten — dass die Fläche (5) bzw. die Funktion $z=\varphi(x, y)$, die man aus den Gleichungen (5) durch Elimination von t und τ erhält,[4]) keine partiellen Ableitungen erster Ordnung besitzt und daher auch keine Lösung der Differentialgleichung (1) darstellt. Wir wollen nun untersuchen, ob in diesem Falle, in dem also die Charakteristikentheorie versagt, die vorgelegte partielle Differentialgleichung überhaupt eine Lösung besitzt, die die gegebene Kurve enthält, wobei wir als Lösung eine die Differentialgleichung erfüllende Funktion mit stetigen Ableitungen erster Ordnung betrachten; wir werden sehen, dass *die gestellte Frage zu verneinen ist.*

Wir betrachten daher in einem solchen Falle die Fläche (5) und ziehen zur Hülfe eine Funktionenfolge $\bar{z}_n(\tau)$, (wobei $n= 1, 2, 3, \ldots$ ist) heran, deren Funktionen im obigen Intervall $0 \leqq \tau \leqq \tau'$ definierte *zweimal stetig differenzierbare* Funktionen sind von der Beschaffenheit, dass die Limesgleichungen

$$\bar{z}_n(\tau) \to \bar{z}(\tau), \quad \frac{d\bar{z}_n(\tau)}{d\tau} \to \frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} \quad \text{für } n \to \infty \tag{6}$$

gleichmässig bestehen. Setzt man zur Abkürzung für jedes $n=1, 2, 3, \ldots$

---

[3]) Dass man die Gleichung der Fläche (5) — bzw. eines Teiles derselben — auf die Form $z=\varphi(x, y)$ bringen kann, beweist man bekanntlich indem man auf die Relation $\frac{d}{d\tau} X(0, \tau)=1$ Bezug nimmt.

[4]) Die Möglichkeit dieser Elimination muss natürlich vorausgesetzt werden, um zu Lösungen zu gelangen.

$$\bar{p}_n(\tau) = \frac{d\bar{z}_n'}{d\tau}, \quad \bar{q}_n(\tau) = -f\left(\frac{d\bar{z}_n}{d\tau}, \bar{z}(\tau), \tau, 0\right),$$

so stellt für jedes n die Fläche

$$\begin{aligned} x &= x(t; \tau, 0, \bar{z}_n(\tau), \bar{p}_n(\tau), \bar{q}_n(\tau)) = X_n(t, \tau), \\ y &= t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = Y_n(t, \tau), \\ z &= z(t; \tau, 0, \bar{z}_n(\tau), \bar{p}_n(\tau), \bar{q}_n(\tau)) = Z_n(t, \tau) \end{aligned}$$

jedenfalls eine stetig differenzierbare Lösung von (1) dar, die durch die Kurve $y = 0$, $z = z_n(x)$ hindurchgeht. Wir nehmen an, dass die Gleichungen dieser Flächen (wenigstens für hinreichend grosse n), sowie die Gleichung der Fläche (5) für solche Werte der Veränderlichen x, y, die der Ungleichungen

$$x' \leqq x \leqq x'', \quad 0 \leqq y \leqq y''$$

genügen, auf die Form

$$z = \varphi_n(x, y), \text{ bzw. } z = \varphi(x, y)$$

gebracht werden können. Die Limesgleichung

$$\varphi_n(x, y) \to \varphi(x, y) \quad \text{für } n \to \infty$$

ist eine unmittelbare Folge der Stetigkeit der Funktionen (4′) und der Annahme (6); es ist ferner für jedes n

$$\varphi_n(x, 0) = \bar{z}_n(x).$$

Würde es nun eine Lösung $\Phi(x, y)$ von (1) (mit stetigen ersten Ableitungen) geben, definiert für dieselben Werte von x, y, die längs der Geraden $y = 0$ mit $\varphi(x, y)$ übereinstimmt:

$$\Phi(x, 0) = \varphi(x, 0) = z(x),$$

und bezeichnen wir das Maximum der Funktion $|z(x) - \bar{z}_n(x)|$ mit M_n, so würde der letzte Satz des § 1. die folgende Tatsache ergeben: In einem Viereck von der dort angegebenen Art gilt — zufolge unserer Annahme, dass die ersten Ableitungen der Funktion $f(p, z, x, y)$ dem Betrage nach kleiner als L bleiben — die Ungleichung

$$|\Phi(x, y) - \varphi_n(x, y)| \leqq M_n e^{Ly}.$$

Da aber die Grössen M_n mit wachsendem n gegen Null streben, so folgt daraus, dass in diesem Gebiet

$$\varphi_n(x, y) \to \Phi(x, y), \quad \text{für } n \to \infty$$

d. h. es ist

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y).$$

Mit anderen Worten *es kann* — unter den gemachten Voraussetzungen — *in dem betrachteten Viereck keine von* $\varphi(x, y)$ *verschiedene Lösung von* (1) *geben, die längs* $y = 0$ *mit* $\bar{z}(x)$ *übereinstimmt.* Wenn daher — wie angenommen — diese Funktion $\varphi(x, y)$ — die durch die Charakteristikentheorie gelieferte Funktion — keine Ableitungen besitzt, so hat die vorgelegte partielle Differentialgleichung (1) keine Lösung dieser Art.

Wir haben uns auf Differentialgleichungen von der Form (1) beschränkt, auf die man die allgemeine Form (I) vermöge eines vielfach angewandten Verfahrens zurückführen kann. Dies würde keine wesentlichen Schwierigkeiten verursachen; es wäre aber interessant das gewonnene Resultat von den weiteren einschränkenden Annahmen, die wir zu Beginn dieses § gemacht haben, zu befreien, wobei — wie mir scheint — neue Schwierigkeiten auftreten.

(*Eingegangen am 16. Juli 1928*)