Sur des polynomes analogues aux polynomes de Bernoulli et sur des formules de sommation analogues à celle de MacLaurin-Euler.

Par CHARLES JORDAN à Budapest.

§ 1. Nous allons définir le polynome de BERNOULLI de seconde espèce $\psi_n(x)$ de degré n, à une constante additive près par sa dérivée:

(1) $$D\psi_n(x) = \binom{x}{n-1}.$$

Développons le polynome en série suivant les coefficients du binome

(2) $$\psi_n(x) = b_0\binom{x}{n} + b_1\binom{x}{n-1} + \ldots + b_n\binom{x}{0}.$$

En prenant la différence finie des deux membres de (1), on trouve

$$\Delta D\psi_n(x) = \binom{x}{n-2} = D\psi_{n-1}(x)\ ^{1)}$$

Intégrons et disposons de la constante additive de $\psi_{n-1}(x)$ pour avoir

(3) $$\Delta\psi_n(x) = \psi_{n-1}(x).$$

Les relations (1) et (3) déterminent complétement la suite des polynomes $\psi_n(x)$.[2] L'opération des différences finies exécutée

---

[1]) Le symbole $\Delta f(x)$ signifiant $f(x+1)-f(x)$, et le symbole $\binom{z}{\lambda}$ le coefficient généralisé du binome

$$\binom{z}{\lambda} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(z-\lambda+1)}.$$

[2]) Cette définition est analogue à celle des polynomes de BERNOULLI de première espèce (*Voir* CH. JORDAN, *Statistique Mathématique*, Paris, 1927, p. 16.)

$$\Delta\varphi_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{et} \quad D\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x).$$

sur les deux membres de l'équation (2) donne

$$\psi_{n-1}(x) = b_0\binom{x}{n-1} + b_1\binom{x}{n-2} + \ldots + b_{n-1}$$

on en conclut que les nombres b_i sont indépendants de n; la suite $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$ fournit tous les polynomes ψ_n.

Entrons maintenant dans les détails. De (1) il suit

$$D\psi_1(x) = 1$$

donc $\psi_1(x) = x + b_1$, par suite $b_0 = 1$. Si $n > 1$, posons dans (1) $x = 0$, alors comme d'une part $\binom{x}{n-1} = 0$ si $x = 0$ et $n > 1$, et d'autre part

$$\left[D\binom{x}{s}\right]_{x=0} = \frac{(-1)^{s-1}}{s},$$

on conclut

$$\frac{1}{n} - \frac{b_1}{n-1} + \frac{b_2}{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} b_{n-1} = 0. \tag{4}$$

En posant dans cette équation successivement $n = 2, 3, 4, \ldots$, on peut déterminer les nombres $b_1, b_2, b_3, \ldots$

On peut les obtenir d'une autre manière; en remarquant qu'à la suite de (1) on a

$$\int_0^1 \binom{x}{n} dx = \psi_{n+1}(1) - \psi_{n+1}(0) = b_n.$$

Si $n > 0$, le signe de la quantité à intégrer est dans tout l'intervalle égal à celui de $(-1)^{n-1}$; on en conclut que $b_{2n} < 0$ et $b_{2n+1} > 0$.

De plus, on peut écrire b_{n+1} la manière suivante:

$$b_{n+1} = \int_0^1 \binom{x}{n} \frac{x-n}{n+1} dx.$$

Comme $x - n$ ne change pas de signe de zéro à un, on a $b_{n+1} = \frac{\xi - n}{n+1} b_n$ où $0 < \xi < 1$; il en résulte

$$\frac{n-1}{n+1}|b_n| < |b_{n+1}| < \frac{n}{n+1}|b_n|.$$

Développons $\binom{x}{n}$ suivant les puissances de x; on a

$$\binom{x}{n} = \frac{1}{n!}\left[S_n^1 x + S_n^2 x^2 + \ldots + S_n^n x^n\right] \tag{5}$$

où les nombres S_n^i sont les nombres de Stirling de première espèce, définis par l'équation

$$S_n^i = \frac{1}{i!}\left[D^i x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)\right]_{x=0}.$$

En intégrant (5) de zéro à un, on trouve

$$b_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i+1} S_n^i.\text{[3]} \tag{6}$$

A l'aide de cette équation on peut, lorsqu'on dispose d'une table de nombres de Stirling, calculer plus rapidement les nombres b_i que par l'équation (4). On trouve

$b_0 = 1$	$b_4 = -19/720$	$b_8 = -33953/3628800$
$b_1 = 1/2$	$b_5 = 3/160$	$b_9 = 57281/7257600$
$b_2 = -1/12$	$b_6 = -863/60480$	$b_{10} = -3250433/479001600$
$b_3 = 1/24$	$b_7 = 275/24192$	...

ou encore à 10 décimales,

$b_0 = 1$	$b_6 = -0{,}01426\ 91799$
$b_1 = 0{,}5$	$b_7 = 0{,}01136\ 73942$
$b_2 = -0{,}08333\ 33333$	$b_8 = -0{,}00935\ 65366$
$b_3 = 0{,}04166\ 66667$	$b_9 = 0{,}00789\ 25540$
$b_4 = -0{,}02638\ 88889$	$b_{10} = -0{,}00678\ 58500$
$b_5 = 0{,}01875$	$b_{11} = 0{,}00592\ 40563.$

Les polynomes de Bernoulli de seconde espèce seront donc :

$$\psi_1(x) = \binom{x}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\psi_2(x) = \binom{x}{2} + \frac{1}{2}\binom{x}{1} - \frac{1}{12}$$

$$\psi_3(x) = \binom{x}{3} + \frac{1}{2}\binom{x}{2} - \frac{1}{12}\binom{x}{1} + \frac{1}{24}$$

$$\ldots$$

[3]) Dans le présent travail, conformément aux principes du Calcul des Différences Finies, nous écrivons la somme définie

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(a+m-1) = \sum_{i=a}^{a+m} f(i).$$

Dans ce cas si $F(x)$ est la somme indéfinie de $f(x)$, c.-à-d. si $\Delta F(x) = f(x)$, la somme définie précédente est aussi égale à $F(a+m) - F(a)$, c.-à-d. à la différence des valeurs de la somme indéfinie aux limites.

Valeurs particulières :

$$\psi_n(0)=b_n,\quad D\psi_1(0)=1,\quad D\psi_n(0)=0\quad (\text{si } n>1)$$
$$\psi_n(1)=b_{n-1}+b_n$$
$$\psi_n(-1)=b_n-b_{n-1}+b_{n-2}-\ldots+(-1)^n b_0.$$

§ **2.** Intégration approchée des fonctions à l'aide des polynomes de Bernoulli de seconde espèce, en partant de la formule de Newton.

Généralement on donne $n+1$ points correspondant à $x=0, 1, 2, \ldots n$, alors on peut déterminer $f(0)$, $\Delta f(0), \ldots \Delta^n f(0)$. La parabole de degré n passant par ces points est donnée par la formule de Newton

$$f(x)=f(0)+\binom{x}{1}\Delta f(0)+\binom{x}{2}\Delta^2 f(0)+\ldots+\binom{x}{n}\Delta^n f(0)$$

et l'intégration donne l'aire correspondent à la parabole entre a et b

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)\,dx=f(0)\,[\psi_1(b)-\psi_1(a)]+\Delta f(0)\,[\psi_2(b)-\psi_2(a)]+\ldots+ \\ +\Delta^n f(0)\,[\psi_{n+1}(b)-\psi_{n+1}(a)].$$

Le plus souvent cette intégrale est demandée entre deux des points donnés. Comme $n+1$ dépasse rarement 10, il est facile de faire des tables de la fonction $\psi_\nu(x)$ pour $\nu=0, 1, 2, \ldots, 10$ et pour $x=0, 1, 2, \ldots, 9$. La Table I. fournit alors très rapidement l'intégrale (1).

Exemple 1. Soit $f(0)=4$, $f(1)=3$, $f(2)=1$ et $f(3)=0$. De là on tire $\Delta f(0)=-1$, $\Delta^2 f(0)=-1$ et $\Delta^3 f(0)=2$; on a donc

$$\int_0^3 f(x)\,dx=4\,[\psi_1(3)-\psi_1(0)]-[\psi_2(3)-\psi_2(0)]-[\psi_3(3)-\psi_3(0)]+ \\ +2\,[\psi_4(3)-\psi_4(0)]=6.$$

Autre méthode. On donne comme avant les $n+1$ points; le polynome de Newton peut s'écrire:

$$f(i+x)=f(i)+\binom{x}{1}\Delta f(i)+\binom{x}{2}\Delta^2 f(i)+\ldots+\binom{x}{n}\Delta^n f(i),$$

on en tire

$$\int_0^1 f(i+x)\,dx=f(i)+b_1\Delta f(i)+b_2\Delta^2 f(i)+\ldots+b_n\Delta^n f(i).$$

En sommant, lorsque i prend les valeurs de a à $a+m-1$, on obtient une formule analogue à la formule de sommation de

Maclaurin—Euler, pour des polynomes. Nous allons déduire sa forme générale plus tard.

$$\int_a^{a+m} f(x)dx = \sum_{i=a}^{a+m} f(i) + b_1[f(a+m) - f(a)] + \tag{2}$$
$$+ b_2[\Delta f(a+m) - \Delta f(a)] + \ldots + b_n[\Delta^{n-1} f(a+m) - \Delta^{n-1} f(a)].$$ [4]

Lorsque l'on connaît les différences de $f(x)$ pour $x=0$, on déterminera ces différences pour une valeur quelconque de x par la formule connue

$$\Delta^s f(x) = \Delta^s f(0) + \binom{x}{1} \Delta^{s+1} f(0) + \binom{x}{2} \Delta^{s+2} f(0) + \ldots +$$
$$+ \binom{x}{n-s} \Delta^n f(0).$$

Dans le cas de l'Exemple 1. on a $a=0$, $m=3$; il en résulte $\Delta f(3)=2$, $\Delta^2 f(3)=3$, $\Delta^3 f(3)=2$, et de la formule (2),

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{3} f(i) + b_1[f(3) - f(0)] + b_2[\Delta f(3) - \Delta f(0)] +$$
$$+ b_3[\Delta^2 f(3) - \Delta^2 f(0)] = 6.$$

§ 3. Intégration des fonction à l'aide de la série d'Everett. On donne $2n+2$ points correspondant à $x=-n$, $-(n-1)$, ..., $-1, 0, 1, \ldots (n+1)$; la parabole de degré $2n+1$ passant par ces points est d'après la formule d'Everett:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{x+\nu}{2\nu+1} \delta^{2\nu} f(1) - \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{x+\nu-1}{2\nu+1} \delta^{2\nu} f(0)$$ [5]

En intégrant de a à b on trouve

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n+1} [\psi_{2\nu+2}(b+\nu) - \psi_{2\nu+2}(a+\nu)]\, \delta^{2\nu} f(1) -$$
$$- \sum_{\nu=0}^{n+1} [\psi_{2\nu+2}(b+\nu-1) - \psi_{2\nu+2}(a+\nu-1)]\, \delta^{2\nu} f(0). \tag{1}$$

En général l'intégration se fait entre deux des points donnés; alors la Table II. facilite les calculs.

---

[4] Une formule analogue a été indiquée par Boole dans une des exemples de son *Treatise on the Calculus of finite Differences*, 1860, p. 243.

[5] δ est le symbole des différences centrales:

$$\delta^2 f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1).$$

Exemple 2. Soient $2n+2=4$, $a=-1$, $b=2$, $f(-1)=4$, $f(0)=3$, $f(1)=1$ et $f(2)=0$, donc $\delta^2 f(1)=1$ et $\delta^2 f(0)=-1$; la formule (1) donne

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = f(1)[\psi_2(2)-\psi_2(-1)] - f(0)[\psi_2(1)-\psi_2(-2)] + \\ + \delta^2 f(1)[\psi_4(3)-\psi_4(0)] - \delta^2 f(0)[\psi_4(2)-\psi_4(-1)] = 6.$$

Autre méthode. Le dévéloppement d'une fonction $f(x+i)$ en série d'EVERETT est la suivante:

$$(2)\quad f(x+i) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{x+\nu}{2\nu+1} \delta^{2\nu} f(i+1) - \sum_{\nu=0}^{n} \binom{x+\nu-1}{2\nu+1} \delta^{2\nu} f(i) + R_{2n}$$

où

$$R_{2n} = \binom{x+n-1}{2n} D^{2n} f(i+\xi)$$

et ξ est une fonction de x telle que $-n+1<\xi<n$, $0<\xi<x$.

Intégrons de 0 à 1 les deux membres de l'équation (2), on trouve

$$\int_0^1 f(x+i)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n} [\psi_{2\nu+2}(\nu+1) - \psi_{2\nu+2}(\nu)]\, \delta^{2\nu} f(i+1) - \\ - \sum_{\nu=0}^{n} [\psi_{2\nu+2}(\nu) - \psi_{2\nu+2}(\nu-1)]\, \delta^{2\nu} f(i) + \int_0^1 R_{2n}\,dx$$

or on a

$$\psi_{2\nu+2}(\nu+1) - \psi_{2\nu+2}(\nu) = \Delta\psi_{2\nu+2}(\nu) = \psi_{2\nu+1}(\nu),$$

de plus, à cause de la symétrie des polynomes ψ_i (§ **6.** formule (1)), on a

$$\psi_{2\nu+1}(\nu) = -\psi_{2\nu+1}(\nu-1);$$

remarquons en outre que

$$f(i+1) + f(i) = 2\mu f\left(i+\frac{1}{2}\right)$$

μ étant le symbole de la moyenne centrale. Des rélations précédentes il résulte

$$(3)\quad \int_0^1 f(x+i)\,dx = 2\sum_{\nu=0}^{n} \psi_{2\nu+1}(\nu)\, \mu\delta^{2\nu} f\left(i+\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 R_{2n}\,dx$$

Pour obtenir $\int_0^z f(x)\,dx$, il suffit de faire la somme des quantités (3), i variant de 0 à z; il suit

$$\int_0^z f(x)\,dx = 2\sum_{\nu=0}^{n} \psi_{2\nu+1}(\nu) \sum_{i=0}^{z} \mu\delta^{2\nu} f\left(i+\frac{1}{2}\right) + \sum_{i=0}^{z}\int_0^1 R_{2n}\,dx.$$

On peut montrer facilement que si $\nu=0$, on a $\psi_1(0)=\frac{1}{2}$ et

$$\sum_{i=0}^{z} \mu f\left(i+\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^{z} f(i) + \frac{1}{2}f(z) - \frac{1}{2}f(0),$$

de plus, si $\nu>0$,

$$\sum_{i=0}^{z} \mu\delta^{2\nu} f\left(i+\frac{1}{2}\right) = \mu\delta^{2\nu-1}f(z) - \mu\delta^{2\nu-1}f(0).$$

On en conclut

$$\begin{aligned}\int_0^z f(x)\,dx = {} & \sum_{x=0}^{z} f(x) + \frac{1}{2}[f(z)-f(0)] + \\ & + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{2\nu+1}(\nu)\,[\mu\delta^{2\nu-1}f(z) - \mu\delta^{2\nu-1}f(0)] + \sum_{i=0}^{z}\int_0^1 R_{2n}\,dx.\end{aligned} \tag{4}$$

La formule (4) ainsi obtenue est une seconde formule de sommation analogue à la formule de MACLAURIN—EULER, mais le développement est fait suivant les différences centrales. Les constantes $\psi_{2\nu+1}(\nu)$ s'obtiennent très facilement à l'aide des nombres b_i, en se servant de la formule (2) du § **1**. Il suffit y poser $x=\nu$ et $n=2\nu+1$.

Il en résulte :

$$\psi_{2\nu+1}(\nu) = \binom{\nu}{\nu} b_{\nu+1} + \binom{\nu}{\nu-1} b_{\nu+2} + \ldots + \binom{\nu}{0} b_{2\nu+1}.$$

On trouve

$$\psi_1(0) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\psi_3(1) = -\frac{1}{24} = -0{,}04166\ 66667$$

$$\psi_5(2) = \frac{11}{1440} = 0{,}00763\ 88889$$

$$\psi_7(3) = -\frac{191}{120960} = -0{,}00157\ 90344$$

$$\psi_9(4) = \frac{2497}{7257600} = 0{,}00034\ 40531.$$

§ **4.** Développement des fonctions en série de polynomes de Bernoulli de seconde espèce. Si $\Sigma f(x+a)$ est développable en série de Newton, on peut écrire

$$\Sigma f(x+a)=\Sigma f(a)+\binom{x}{1}f(a)+\binom{x}{2}\Delta f(a)+\ldots+\binom{x}{n}\Delta^{n-1}f(a)+R_{n+1}.$$

Prenons la dérivée des deux membres par rapport à a et posons $a=0$, il s'en suit

$$D\Sigma f(x)=D\Sigma f(0)+\binom{x}{1}Df(0)+\binom{x}{2}D\Delta f(0)+\ldots+[D_a R_{n+1}]_{a=0}.$$

Multiplions les deux membres par dx et intégrons; il résulte

$$\Sigma f(x)=\psi_1 D\Sigma f(0)+\psi_2 Df(0)+\psi_3 D\Delta f(0)+\ldots+\int[D_a R_{n+1}]_{a=0}dx.$$

L'opération des différences finies exécutée aux deux membres, par rapport à x, en supposant $\Delta x=1$, donne

(1) $$f(x)=D\Sigma f(0)+\psi_1 Df(0)+\ldots+\Delta\int[D_a R_{n+1}]_{a=0}dx.$$

Remarquons que l'on peut mettre R_{n+1} sous la forme

$$R_{n+1}=\binom{x}{n+1}D^{n+1}\Sigma f(a+\xi)$$

où $0<\xi<n$ ou $0<\xi<x$. Par suite, on peut écrire le développement (1), de la manière suivante:

(2) $$f(x)=c_0+c_1\psi_1+c_2\psi_2+\ldots+c_n\psi_n+\mathcal{R}_{n+1}.$$

En identifiant les coefficients, on a

$$c_0=[D\Sigma f(x)]_{x=0},\quad c_s=[D\Delta^{s-1}f(x)]_{x=0},$$

de plus

$$\mathcal{R}_{n+1}=\int_x^{x+1}\binom{t}{n+1}[D_a D_t^{n+1}\Sigma f(a+\xi)]_{a=0}dt$$

où ξ est une fonction de t telle que $0<\xi<n$, ou $0<\xi<t$.

Lorsqu'on a $D_a D^{n+1}\Sigma f(\xi+a)>0$ pour toutes les valeurs de t telles que $x<t<x+1$, on aura

$$\mathcal{R}_{n+1}=\psi_{n+1}(x)D_a D^{n+1}\Sigma f(\eta)$$

où η est une fonction de x satisfaisant à $0<\eta<n$ ou $0<\eta<x$.

Exemple 3. Soit $\Sigma f(x)=2^x$, on en tire $f(x)=2^x$ et $\Delta^{s-1}f(x)=2^x$; de plus, $D\Sigma f(x)=2^x\log 2$ et $D\Delta^{s-1}f(x)=2^x\log 2$, par suite $c_0=c_s=\log 2$, donc

(3) $$2^x=[1+\psi_1+\psi_2+\psi_3+\ldots]\log 2;$$

comme $\psi_n(0)=b_n$, en posant dans (3) $x=0$, on trouve la relation

$$\frac{1}{\log 2}=\sum_{i=0}^{\infty} b_i=1{,}44269\ 522. \tag{4}$$

Remarque. En développant d'une manière analogue $f(x)=1/2^x$, on arrive à la relation

$$2-\frac{1}{2\log 2}=\sum_{i=0}^{\infty}|b_i|\left(\frac{1}{2}\right)^i=1{,}27865\ 239.$$

Exemple 4. Soit $\Sigma f(x)=\varphi_{n+1}(x)$, où $\varphi_{n+1}(x)$ est le polynome de Bernoulli de première espèce de degré $n+1$. (*Voir* la note[2]).) Il en résulte

$$f(x)=x^n/n!;\ D\Sigma f(x)=\varphi_n(x);\ Df(x)=x^{n-1}/(n-1)!$$

en outre $\Delta^{\nu-1}Df(x)=\Delta^{\nu}\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$, on en conclut

$$c_0=\varphi_n(0)=\frac{B_n}{n!},\ c_1=0,\ c_\nu=\frac{(\nu-1)!}{(n-1)!}\mathfrak{S}_{n-1}^{\nu-1}.$$

Les nombres $\mathfrak{S}_k^i$ étant les nombres de Stirling de seconde espèce définis par

$$\left[\Delta^i\frac{x^k}{i!}\right]_{x=0}=\mathfrak{S}_k^i.$$

Le développement cherché sera donc

$$\frac{x^n}{n!}=\frac{B_n}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}[\psi_2\mathfrak{S}_{n-1}^1+2!\psi_3\mathfrak{S}_{n-1}^2+\ldots+(n-1)!\psi_n\mathfrak{S}_{n-1}^{n-1}]. \tag{5}$$

En posant dans (5) $x=0$, on trouve la relation suivante, qui donne les nombres de Bernoulli B_n en fonction des coefficients b_i des polynomes de Bernoulli de seconde espèce :

$$B_n=-n[b_2\mathfrak{S}_{n-1}^1+2!b_3\mathfrak{S}_{n-1}^2+\ldots+(n-1)!b_n\mathfrak{S}_{n-1}^{n-1}].$$

Remarque. En développant $f(x)=\binom{x}{n}$ suivant des polynomes de Bernoulli de première espèce, on obtient d'une manière analogue la relation donnant les nombres b_n en fonction des nombres de Bernoulli

$$b_n=-\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{B_2}{2}S_{n-1}^1+\frac{B_4}{4}S_{n-1}^3+\frac{B_6}{6}S_{n-1}^5+\ldots+\frac{B_n}{n}S_{n-1}^{n-1}\right],$$

où les nombres S_k^ν sont les nombres de Stirling de première espèce, mentionnés au § **1.**

Exemple 5. On peut utiliser le développement suivant des polynomes de Bernoulli pour déterminer la fonction génératrice de ces polynomes; il suffit de disposer de $\Sigma f(x)$ de manière que c_s soit égale à t^s. On trouve que

$$\Sigma f(x) = \frac{(1+t)^x}{\log(1+t)}$$

remplit cette condition; en effet, il résulte

$$f(x) = \frac{t(1+t)^x}{\log(1+t)}, \quad D\Sigma f(x) = t(1+t)^x, \quad \Delta^{s-1} Df(x) = t^s(1+t)^x$$

et par suite $c_s = t^s$.

La fonction $f(x)$ est donc la fonction génératrice de $\psi_n(x)$. En posant $x=0$ dans $f(x)$, on obtient la fonction génératrice des coefficients b_i

$$\frac{t}{\log(1+t)} = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots \tag{6}$$

En y posant $t=1$, on retrouve la relation (4).

Posons encore dans (6) $t=-1$, il résulte

$$0 = 1 - b_1 + b_2 - b_3 + \ldots;$$

comme $b_{2n} < 0$, $b_{2n-1} > 0$ et $b_0 = 1$, on peut écrire cette relation

$$\sum_{i=0}^{\infty} |b_i| = 2.$$

§ 5. Déduisons encore quelques formules qui seront utiles plus tard. De $\Delta F(x) = f(x)$ on conclut

$$\Delta F(a-x) = -[F(a-x) - F(a-x-1)] = -f(a-x-1)$$

ce qui donne dans le cas particulier des polynomes ψ_n

(1) $\Delta \psi_n(a-x) = -\psi_{n-1}(a-x-1)$

$\Delta^s \psi_n(a-x) = (-1)^s \psi_{n-s}(a-x-s)$

(2) $\Sigma \psi_n(a-x) = -\psi_{n+1}(a-x+1) + \omega(x)$ où $\omega(x+1) = \omega(x)$.

§ 6. Polynomes de Bernoulli de seconde espèce de degré impair. Symétrie des polynomes. On a

$$D\psi_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n)!} x(x-1)\ldots(x-2n+1).$$

Comme cette dérivée s'annule pour $x = 0, 1, 2, \ldots, (2n-1)$ en changeant de signe, les extréma de ψ_{2n+1} ont lieu pour ces valeurs. De $-\infty$ à 0 la dérivée est positive, on en conclut, que la fonction est maximum pour $x=0, 2, 4, \ldots, 2n-2$ et minimum pour $x=1, 3, \ldots, 2n-1$.

En introduisant la variable ξ par la relation $x=n-\frac{1}{2}+\xi$, on a

$$D\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}+\xi\right)=$$
$$=\frac{1}{(2n)!}\left[\xi^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\xi^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[\xi^2-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\right].$$

La dérivée étant une fonction pair en ξ, son intégrale sera une fonction impair, par suite

$$\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}+\xi\right)=-\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}-\xi\right) \text{ ou bien}$$

$$\psi_{2n+1}(x)=-\psi_{2n+1}(2n-1-x). \tag{1}$$

Les valeurs de la fonction ψ_{2n+1} sont donc symétriques par rapport au point de coordonnées $x=n-\frac{1}{2}$, $y=0$.

Cas particuliers:

$$\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}\right)=-\psi_{2n+1}\left(n-\frac{1}{2}\right)=0,$$
$$\psi_{2n+1}(0)=-\psi_{2n+1}(2n-1)=b_{2n+1}.$$

Il en résulte les relations suivantes entre les coefficients b_i

$$\binom{n-\frac{1}{2}}{2n+1}b_0+\binom{n-\frac{1}{2}}{2n}b_1+\binom{n-\frac{1}{2}}{2n-1}b_2+\ldots+\binom{n-\frac{1}{2}}{0}b_{2n+1}=0$$

$$\binom{2n-1}{2n-1}b_2+\binom{2n-1}{2n-2}b_3+\ldots+\binom{2n-1}{1}b_{2n}+2b_{2n+1}=0.$$

Elles permettent de déterminer b_{2n+1} lorsqu'on connaît les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$. La première formule se simplifie en remarquant que ses deux premiers termes sont égaux et de signe contraire, et par suite on peut les omettre.

Montrons que depuis $x=0$ jusqu'au point de symétrie *les maxima vont en diminuant*

$$\psi_{2n+1}(0)>\psi_{2n+1}(2)>\psi_{2n+1}(4)>\ldots$$

Il suffit de prouver que

$$\psi_{2n+1}(2\nu+2)-\psi_{2n+1}(2\nu)=\int_{2\nu}^{2\nu+2}\binom{x}{2n}dx<0 \text{ si } 0<x<n-\frac{1}{2}.$$

On peut écrire cette intégrale

$$(2)\qquad \int_{2\nu+1}^{2\nu+2}\left[\binom{x}{2n}+\binom{x-1}{2n}\right]dx=\int_{2\nu+1}^{2\nu+2}\binom{x-1}{2n-1}\frac{x-n}{2n}dx.$$

Or le premier facteur est positif quelque soit ν; le second sera négatif si $x<n$ ou $2\nu\leqslant n-2$. Les maxima vont donc bien en diminuant jusque au point de symétrie. Pour montrer que *tous les maxima sont positif,* il suffit de montrer que le maximum le plus proche du point de symetrie est positif; pour montrer que tous les minima sont négatifs il faut montrer que le minimum le plus proche du point de symétrie est négatif. Ces extréma ont lieu pour $x=n-1$ et pour $x=n$.

La différence entre zéro et l'extrémum $\psi_{2n+1}(n-1)$ s'exprime par

$$\int_{n-1}^{n-\frac{1}{2}}\binom{x}{2n}dx=-\psi_{2n+1}(n-1).$$

Dans l'intervalle considéré $\binom{x}{2n}$ a le même signe que $(-1)^n$; il en résulte que, si n est pair, $\psi_{2n+1}(n-1)<0$, d'après ce que nous avons vu c'est un minimum, donc *tous les minima sont négatifs;* si n est impair, il résulte $\psi_{2n+1}(n-1)>0$, c'est un maximum, donc *tous les maxima sont positifs.*

Conclusion: Pour toutes les valeurs paires de x le polynome $\psi_{2n+1}(x)$ est positif, pour toutes les valeurs impaires de x il est négatif pourvu que l'on ait $0\leqq x\leqq 2n-1$.

Remarque. De la formule (2) il résulte que

$$\int_{-1}^{1}\binom{x}{2n}dx=\psi_{2n+1}(1)-\psi_{2n+1}(-1)>0;$$

on en tire

$$\psi_{2n+1}(-1)<0$$

et à cause de la relation exprimant la symétrie, $\psi_{2n+1}(2n)>0$. On conclut qu'entre $x=-1$ et $x=2n$ le polynome $\psi_{2n+1}(x)$ change $2n+1$ fois de signe, donc toutes les racines sont réelles, simples et elles sont toutes comprises dans cet intervalle. De

$$\psi_{2n+1}(-1)=-b_0+b_1-b_2+\ldots+b_{2n+1}<0$$

on déduit

$$\sum_{i=0}^{2n} |b_i| < 2.$$

§ **7.** Polynomes de Bernoulli de seconde espèce de degré pair. Symétrie des polynomes. Comme $\Delta\psi_{2n+1}(x) = \psi_{2n}(x)$, on déduit de

$$\psi_{2n+1}(x) = -\psi_{2n+1}(2n-1-x)$$

en se servant de la formule (1) du § **5.**, la relation suivante

$$\psi_{2n}(x) = \psi_{2n}(2n-2-x),$$

c.-à-d. que le polynome $\psi_{2n}(x)$ est symétrique par rapport à la droite $x = n-1$.

Dans le cas particulier où $x = 0$

$$\psi_{2n}(0) = \psi_{2n}(2n-2),$$

on en tire la relation

$$\binom{2n-2}{2n-2} b_2 + \binom{2n-2}{2n-3} b_3 + \ldots + \binom{2n-2}{1} b_{2n-1} = 0.$$

Cette équation permet de calculer b_{2n-1} lorsque l'on connait b_2, b_3, ..., b_{2n-2}. Par exemple pour $n = 6$ on trouve

$$b_2 + 10b_3 + 45b_4 + 120b_5 + 210b_6 + 252b_7 + 210b_8 + 120b_9 +$$
$$+ 45b_{10} + 10b_{11} = 0$$

et, en utilisant les données des tables du § **1.**, $b_{11} = 0{,}00592\ 40563$.

La dérivée du polynome $\psi_{2n}(x)$

$$D\psi_{2n}(x) = \frac{1}{(2n-1)!} x(x-1)(x-2)\ldots(x-2n+2)$$

montre que ses extréma ont lieu pour $x = 0, 1, 2, \ldots, 2n-2$, de plus comme cette dérivée est négative entre $-\infty$ et 0, les minima ont lieu pour $x = 0, 2, 4, \ldots, 2n-2$, et les maxima pour $x = 1, 3, 5, \ldots, 2n-3$.

On peut montrer de la même manière qu'au § précédent que de zéro à la droite de symétrie, les maxima vont en diminuant et les minima en augmentant.

Pour prouver que tous les maxima sont positifs et tous les minima négatifs, il suffit de faire voir que le maximum le plus rapproché de la doite de symétrie est positif et le minimum le plus rapproché négatif.

Remarquons qu'un des extréma se trouve sur cette droite. On a

$$\psi_{2n}(n-1) = \psi_{2n+1}(n) - \psi_{2n+1}(n-1).$$

Lorsque n est pair, $\psi_{2n}(n-1)$ est un maximum; il est positiv, car d'après ce qu'on a vu au § **6.**, le second membre est dans ce cas plus grand que zéro. Lorsque n est impair, $\psi_{2n}(n-1)$ est un minimum; il est négatif, car dans ce cas le second membre est plus petit que zéro.

En refaisant le même raisonnement sur

$$\psi_{2n}(n-2)=\psi_{2n+1}(n-1)-\psi_{2n+1}(n-2)$$

on aura prouvé que tous les maxima sont postifs et tous les minima négatifs, c.-à.-d.

$$\psi_{2n}(2m)<0, \quad \psi_{2n}(2m+1)>0 \quad \text{si } 0\leqq x\leqq 2n-2.$$

Le *minimum minimorum* est atteint pour $x=0$ et pour $x=2n-2$, pour ces valeurs on a $\psi_{2n}(0)=b_{2n}<0$. Comme $\psi_{2n}(\pm\infty)>0$, on en conclut que pour toutes les valeurs de x on a

(1) $$\psi_{2n}(x)-b_{2n}\geqq 0.$$

Cette relation importante servira plus tard.

On peut montrer par une formule semblable à (2) du § **6.** que

$$\int_{-1}^{1}\binom{x}{2n-1}dx<0,$$

il en résulte $\psi_{2n}(-1)>\psi_{2n}(1)>0$; et par suite aussi $\psi_{2n}(2n-1)>0$.

On en déduit qu'entre -1 et $2n-1$ le polynome $\psi_{2n}(x)$ change $2n$ fois de signe, toutes ses racines sont donc réelles, simples et comprises entre ces valeurs.

Résumé. Symétrie des polynomes $\psi_n(x)$:

$$\psi_n\left(\frac{1}{2}n-1+x\right)=(-1)^n\,\psi_n\left(\frac{1}{2}n-1-x\right).$$

Toutes les racines de $\psi_n(x)=0$ sont réelles, simples et elles sont toutes comprises entre -1 et $n-1$.

Les maxima de ψ_n sont positifs, les minima négatifs. Les valeurs absolues des extréma vont en diminuant de $x=0$ à $x=\frac{1}{2}n-1$.

§ **8.** Formule de sommation. Posons dans la formule (2) du § **2.** $a=0$ et $m=z$, on obtient, $f(x)$ étant un polynome,

$$\int_0^z f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{z}f(i)+b_1[f(z)-f(0)]+b_2[\Delta f(z)-\Delta f(0)]+$$
$$+b_3[\Delta^2 f(z)-\Delta^2 f(0)]+\dots$$

où z est nombre entier.

Cette formule est semblable à celle de MACLAURIN—EULER, mais au lieu des dérivées de $f(x)$ ce sont ses différences finies qui y figurent.

Pour déduire une formule de sommation valable dans le cas d'une fonction $f(x)$ quelconque, partons de $\Sigma f(x)$ en utilisant plusieurs fois successivement la formule connue de la sommation par parties. Pour déduire cette formule désignons pour abréger $\Sigma V_i(x) = V_{i+1}(x)$, on aura alors

$$\Sigma[U(x)\, V_0(x)] = U(x)\, V_1(x) - \Sigma[V_1(x+1)\, \Delta U(x)].$$

La sommation par parties executée sur la somme du second membre donne

$$\Sigma[V_1(x+1)\, \Delta U(x)] = V_2(x+1)\, \Delta U(x) - \Sigma[V_2(x+2)\, \Delta^2 U(x)].$$

La troisième sommation par parties conduit à

$$\Sigma[V_2(x+2)\, \Delta^2 U(x)] = V_3(x+2)\, \Delta^2 U(x) - \Sigma[V_3(x+3)\, \Delta^3 U(x)]$$

et ainsi de suite, de manière que l'on arrive à

$$\begin{aligned} &\Sigma V_0(x)\, U(x) = \\ (1) \quad &= V_1(x)\, U(x) - V_2(x+1)\, \Delta U(x) + V_3(x+2)\, \Delta^2 U(x) - \ldots + \\ &+ (-1)^{n+1} V_n(x+n-1)\, \Delta^{n-1} U(x) + (-1)^n \Sigma[V_n(x+n)\, \Delta^n U(x)]. \end{aligned}$$

On voit que les sommations par parties successives livrent des termes dont l'argument va en croissant. Cette avance des arguments rend compliqué l'emploi de la formule. On peut l'éviter dans certains cas, par exemple lorsque $V_0(x) = 1$ et si l'on execute les sommations à l'aide de la formule (2) du § **5.** En omettant la fonction périodique arbitraire on peut écrire

$$\begin{aligned} \Sigma 1 &= -\psi_1(u-x) = V_1(x) \\ -\Sigma \psi_1(u-x) &= \psi_2(u-x+1) = V_2(x) \\ \Sigma \psi_2(u-x+1) &= -\psi_3(u-x+2) = V_3(x) \end{aligned}$$

et ainsi de suite; on remarque que dans ces sommations il y a retrogradation de l'argument, ce qui va compenser l'avance dûe à la sommation par parties. En posant $U(x) = f(x)$ la formule (1) devient

$$(2) \quad \begin{aligned} &\Sigma f(x) = -\psi_1(u-x) f(x) - \psi_2(u-x)\, \Delta f(x) - \ldots - \\ &- \psi_{n-1}(u-x)\, \Delta^{n-2} f(x) + \Sigma[\psi_{n-1}(u-x-1)\, \Delta^{n-1} f(x)]. \end{aligned}$$

Comme on peut ajouter à une somme indéfinie une constante arbitraire quelconque, écrivons la somme qui figure au second membre, pour simplifier les résultats, de la manière suivante:

$$\Sigma[\psi_{n-1}(u-x-1)\Delta^{n-1}f(x)] =$$
$$= [-\psi_n(u-x)+b_n]\Delta^{n-1}f(x)+\Sigma[\psi_n(u-x-1)-b_n]\Delta^n f(x).$$

Pour abréger, désignons la dernière somme par $\varrho_n(x, u)$; on aura

$$\Sigma f(x) = -\sum_{\nu=1}^{n+1}\psi_\nu(u-x)\Delta^{\nu-1}f(x)+b_n\Delta^{n-1}f(x)+\varrho_n(x, u).$$

Prenons la dérivée des deux membres par rapport à x, puis posons $x=u$ et remarquons que nous avons vu au § **1.** que $\psi_\nu(0)=b_\nu$, $D\psi_1(0)=1$ et $D\psi_\nu(0)=0$ si $\nu>1$. En écrivant de nouveau x au lieu de u, on a

$$D\Sigma f(x) = f(x)-\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu D\Delta^{\nu-1}f(x)+[D_x\varrho_n(x, u)]_{u=x}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par dx et intégrons de a à z; $z-a$ devant être entier. Le premier membre devient égale à $[\Sigma f(x)]_{x=z}-[\Sigma f(x)]_{x=a} = \sum_{x=a}^{z} f(x)$; par suite

$$(4)\qquad \sum_{x=a}^{z} f(x) = \int_a^z f(x)\,dx - \sum_{\nu=1}^{z} b_\nu[\Delta^{\nu-1}f(z)-\Delta^{\nu-1}f(a)]+$$
$$+\int_a^z [D_x\varrho_n(x, u)]_{u=x}\,dx.$$

La formule de sommation (4) est valable pour des fonctions quelconques; elle est préférable à la formule de MACLAURIN—EULER dans le cas des fonctions dont les différences sont plus facilement calculables que les dérivées.

§ **9.** Transformation du reste. En choisissant l'indice pair, on a

$$\varrho_{2n}(x, u) = \Sigma[\psi_{2n}(u-x-1)-b_{2n}]\Delta^{2n}f(x).$$

Cette somme indéfinie n'est définie qu'à une fonction périodique arbitraire près, dont la période est égale à l'unité; soit $\omega(x)$ une telle fonction. La somme indéfinie précédente peut être remplacée par la somme définie suivante

$$\varrho_{2n}(x, u) = \sum_{t=u-1}^{x}[\psi_{2n}(u-t-1)-b_{2n}]\Delta^{2n}f(t)+\omega(x)$$

$x-u$ devant être entier.

D'après ce que nous avons vu, (1) § **7.**, on a toujours $\psi_{2n}(x)-b_{2n}\geqq 0$, on peut donc employer le théorème de la moyenne, et l'expression précédente devient :

$$\varrho_{2n}(x,u)=\Delta^{2n}f(\xi)\sum_{t=u-1}^{x}[\psi_{2n}(u-t-1)-b_{2n}]+\omega(x)$$

où ξ est une certaine fonction de x telle que $u-1<\xi<x$. Effectuons la sommation d'après la formule (2) du § **5.** On trouve

$$\varrho_{2n}(x,u)=\Delta^{2n}f(\xi)[-\psi_{2n+1}(u-x)+ \\ +\psi_{2n+1}(1)-(x-u+1)b_{2n}]+\omega(x).$$

Maintenant on peut prendre la dérivée de ϱ_{2n} par rapport à x; en remarquant que $\psi_{2n+1}(1)=b_{2n}+b_{2n+1}$, on trouve

$$D_x\varrho_{2n}(x,u)=\Delta^{2n}Df(\xi)[-\psi_{2n+1}(u-x)+(u-x)b_{2n}+b_{2n+1}]+ \\ +\Delta^{2n}f(\xi)[D\psi_{2n+1}(u-x)-b_{2n}]+D\omega(x).$$

Il faut encore poser $x=u$, comme $\psi_{2n+1}(0)=b_{2n+1}$ et $D\psi_{2n+1}(0)=0$, le premier terme disparait et l'on a

$$[D_x\varrho_{2n}(x,u)]_{x=u}=-b_{2n}\Delta^{2n}f(\xi)+D\omega(x)$$

enfin écrivons x au lieu de u, multiplions les deux membres par dx et intégrons de a à z; comme $z-a$ est entier, $\omega(z)=\omega(a)$; le reste obtenu sera

$$R_{2n}=-b_{2n}\int_a^z\Delta^{2n}f(\xi)\,dx \quad \text{où } x-1<\xi<x.$$

En employant encore une fois le théorème de la moyenne, on a aussi

$$R_{2n}=-b_{2n}(z-a)\Delta^{2n}f(\eta) \quad \text{où } a-1<\eta<z.$$

Enfin la formule sommatoire avec le reste sera

$$\sum_{x=a}^{z}f(x)=\int_a^z f(x)\,dx-\sum_{\nu=1}^{2n}b_\nu[\Delta^{\nu-1}f(z)-\Delta^{\nu-1}f(a)]- \\ -b_{2n}(z-a)\Delta^{2n}f(\eta). \tag{1}$$

Cette formule, dans laquelle $\Delta x=1$, peut être facilement généralisée pour une variable y prenant les valeurs $y_0, y_0+h, y_0+2h, \ldots$; il suffit de remplacer x par $x=a+\frac{1}{h}(y-y_0)$.

Cas particulier remarquable: Faisons dans la formule précédente $z=a+1$, alors on trouve,

$$(2) \qquad \int_a^{a+1} f(x)\,dx = f(a) + \sum_{\nu=1}^{2n} b_\nu \Delta^\nu f(a) + b_{2n}\Delta^{2n} f(\eta).$$

$$(a-1<\eta<a+1).$$

A cause de sa simplicité cette formule est très pratique pour *la quadrature des fonctions,* dont les différences sont plus facilement calculables que les dérivées.

Exemple 6. Déterminons l'intégrale de $\psi_n(x)$ entre 0 et 1. La formule (2) donne:

$$\int_0^1 \psi_n(x)\,dx = \psi_n(0) + \sum_{\nu=1}^{n+1} b_\nu \Delta^\nu \psi_n(0) = b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + b_2 b_{n-2} + \ldots b_n b_0.$$

Les formules précédentes peuvent présenter d'autres avantages sur la formule Maclaurin—Euler; en effet, il arrive quelquefois que cette dernière prolongée indéfiniment forme une série divergente, tandis que les séries dévéloppées suivant les différences successives sont convergentes. C'est ce qui arrive par exemple pour $f(x) = \frac{1}{x}$. En effet $D^n\left(\frac{1}{x}\right)$ augmente indéfiniment avec n si x reste fini, par contre $\lim \Delta^n\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ pour $n=\infty$; par suite, comme la série des différences est une série alternée, elle est convergente.

§ **10.** Considérons le cas particulier suivant: Pour toutes les valeurs de n on a $\Delta^{2n} f(x) > 0$ et $\Delta^{2n+1} f(x) < 0$. On en conclut immédiatement que $R_{2n} > 0$ quel que soit n, de plus comme

$$R_{2n} = -b_{2n}[\Delta^{2n-1} f(z) - \Delta^{2n-1} f(a)] - b_{2n+1}[\Delta^{2n} f(z) - \Delta^{2n} f(a)] + R_{2n+2}$$

ou encore

$$R_{2n} = -b_{2n}\sum_{x=a}^{z} \Delta^{2n} f(x) - b_{2n+1}\sum_{x=a}^{z} \Delta^{2n+1} f(x) + R_{2n+2};$$

comme $b_{2n} < 0$ et $b_{2n+1} > 0$, il résulte que R_{2n} est la somme de trois quantités positives et que $R_{2n} > R_{2n+2}$. Si en outre $\lim\limits_{n=\infty} \Delta^n f(x) = 0$ pour toutes les valeurs de x considérées, on a aussi

$$\lim_{n=\infty} R_{2n} = 0$$

et

$$\sum_{x=a}^{z} f(x) - \int_a^z f(x)\,dx = -\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu [\Delta^{\nu-1} f(z) - \Delta^{\nu-1} f(a)].$$

Exemple 7. Soit $f(x)=\frac{1}{x}$. Il résulte $\Delta^n f(x) = \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$; lorsque $x>0$, on a $\lim\limits_{n=\infty} \Delta^n f(x) = 0$, par suite

$$\sum_{x=a}^{z} \frac{1}{x} - \int_a^z \frac{1}{x}\,dx = -\sum_{\nu=1}^{2n} b_\nu [\Delta^{\nu-1} f(z) - \Delta^{\nu-1} f(a)] - b_{2n}(z-a)\Delta^{2n} f(\eta).$$

Si $n=\infty$, $a=1$ et $z=\infty$, on obtient une formule donnant la constante d'Euler

$$C = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{b_\nu}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{b_\nu}{\nu} \right|$$

Si l'on fait $n=\infty$, $a=1$, $z=2$, on trouve

$$\log 2 = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{b_\nu}{\nu+1} \right|$$

Faisons encore $n=2$, $a=20$ et $z=100$; dans ce cas on trouve

$$\sum_{x=20}^{100} \frac{1}{x} = \log 5 + b_1 \left[\frac{1}{20} - \frac{1}{100}\right] - \frac{b_2}{2}\left[\frac{1}{\binom{21}{2}} - \frac{1}{\binom{101}{2}}\right] +$$

$$+ \frac{b_3}{3}\left[\frac{1}{\binom{22}{3}} - \frac{1}{\binom{102}{3}}\right] + R_4 = 1{,}589637 + R_4$$

Comme $19 < \eta < 100$, on a

$$-R_4 < \frac{16 b_4}{\binom{\eta+4}{5}} < 0{,}000126.$$

En réalité l'erreur est égale à 0,000099.

Table I.

x	$\psi_1(x)$	$\psi_2(x)$	$\psi_3(x)$	$\psi_4(x)$	$\psi_5(x)$
0	0,5	— 0,08333 33333	0,04166 66667	— 0,02638 88889	0,01875
1	1,5	0,41666 66667	— 0,04166 66667	0,01527 77778	— 0,00763 88889
2	2,5	1,91666 66667	0,375	— 0,02638 88889	0,00763 88889
3	3,5	4,41666 66667	2,29166 66667	0,34861 11111	— 0,01875
4	4,5	7,91666 66667	6,70833 33333	2,64027 77778	0,32986 11111
5	5,5	12,41666 66667	14,625	9,34861 11111	2,97013 88889
6	6,5	17,91666 66667	27,04166 66667	23,97361 11111	12,31875
7	7,5	24,41666 66667	44,95833 33333	51,01527 77778	36,29236 11111
8	8,5	31,91666 66667	69,375	95,97361 11111	87,30763 88889
9	9,5	40,41666 66667	101,29166 66667	165,34861 11111	183,28125

x	$\psi_6(x)$	$\psi_7(x)$	$\psi_8(x)$	$\psi_9(x)$	$\psi_{10}(x)$
0	— 0,01426 91799	0,01136 73942	— 0,00935 65366	0,00789 25540	— 0,00678 58500
1	0,00448 08201	— 0,00290 17857	0,00201 08576	— 0,00146 39826	0,00110 67040
2	— 0,00315 80688	0,00157 90344	— 0,00089 09881	0,00054 68750	— 0,00035 72786
3	0,00448 08201	— 0,00157 90344	0,00068 81063	— 0,00034 40531	0,00018 95964
4	— 0,01426 91799	0,00290 17857	— 0,00089 09281	0,00034 40531	— 0,00015 44567
5	0,31559 19312	— 0,01136 73942	0,00201 08576	— 0,00054 68750	0,00018 95964
6	3,28573 03201	0,30422 45370	— 0,00935 65366	0,00146 39826	— 0,00035 72786
7	15,60448 08201	3,58995 53571	0,29486 80004	— 0,00789 25540	0,00110 67040
8	51,89684 19312	19,13443 61772	3,88482 33575	0,28697 54464	— 0,00678 58500
9	139,20448 08201	71,09127 81084	23,07925 95347	4,17179 88029	0,28018 95964