Über die Verteilung iterierter Summen von positiven Nullfolgen mod 1.

Von Paul Csillag in Budapest.

I.

Wir bezeichnen mit a und p reelle und positive Zahlen, mit n eine natürliche Zahl und wir betrachten die Zahlenfolge

$$q_n = q_n(a,p) = \text{gebrochener Teil von } a\,n^p \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bei welchen Werten der Parameter a, p liegt die Folge $q_n(a,p)$ im Intervall (0, 1) überall dicht?

Wir unterscheiden mehrere Fälle.

1) $p = 1$. Wenn a eine rationale Zahl bedeutet, so hat die Folge nur endlich viele verschiedene Werte, wenn aber a irrational ist, so liegt die Folge nach klassischen Resultaten im Intervall (0, 1) überall dicht, nach neueren Untersuchungen sogar *gleichmässig dicht.*

2) p ist ganz und grösser als Eins. Bei rationalem a ist die Folge wieder nur endlich vieler verschiedener Werte fähig. Bei irrationalem a liegt die Folge nach tiefen Untersuchungen von Hardy und Littlewood[1]) im Intervall (0, 1) gleichmässig dicht.

3) $0 < p < 1$. In diesem Falle liegt die Folge, ob a rational oder irrational, nach Herrn Fejér[2]) im Intervall (0, 1) gleichmässig dicht. Dies ist eine Folge der Tatsache, dass in diesem Falle $\lim\limits_{n=\infty} | q_n - q_{n-1} | = 0$.

---

[1]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Some Problems of Diophantine Approximation, *Acta Mathematica*, **37** (1914), p. 155—239.

[2]) L. Fejér, A Fourier-féle sorról, *Mathematikai és természettudományi értesitő*, **24** (1906), S. 192—297., oder Sur la série de Fourier, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris*, **142** (1906), p. 501—503. Siehe noch G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, 1925, S. 67—77. Vergleiche besonders S. 72., Aufgabe 175.

4) $p =$ keine ganze Zahl > 1.[3]) Wir wollen durch Anwendung eines vielleicht an sich nicht uninteressanten Satzes beweisen, dass für jedes a die Folge im Intervall (0, 1) überall dicht liegt.[4])

Die überalldichte Lage der Folge q_n bei nichtganzem positivem p folgern wir daraus, dass die Folge an^p durch wiederholte Summation aus einer positiven Nullfolge entsteht.

Die ersten Glieder der Folge sind offenbar irrelevant und die $[p]+1$-te Differenz der Folge ist positiv und asymptotisch gleich der $[p]+1$-ten Derivierten von an^p nach n, also

$$ap(p-1)\ldots(p-[p])\,n^{p-[p]-1},$$

also bilden diese Differenzen eine positive Nullfolge mit divergenter Summe.

Für solche Folgen beweisen wir aber allgemein den

Satz. *Sei*

$$d_n > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$d_n \to 0 \qquad (n \to \infty),$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu = s_n \to \infty$$

(so dass also nach Herrn Fejér *die Bruchteile von s_n im Intervall* (0, 1) *überall dicht liegen).*

Setzen wir weiter

$$s_n' = s_1 + s_2 + \ldots + s_n,$$
$$s_n'' = s_1' + s_2' + \ldots + s_n',$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n^{(l)} = s_1^{(l-1)} + s_2^{(l-1)} + \ldots + s_n^{(l-1)}.$$

---

3) Die Fragestellung verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn Fejér. Er hat dazu folgendes bemerkt: Die asymptotische Formel für die Koeffizienten der Potenzreihe um den Nullpunkt für die Funktion $e^{\frac{1}{z-1}}$ lautet:

$$n^{3/4}\sqrt{\pi e}\,a_n \sim \sin(2\sqrt{n} + {}^3/_4\,\pi).$$

Die Fragestellung 3) hängt also zusammen mit der Frage nach den Vorzeichenwechseln der Koeffizienten in der Potenzreihe einer einfachen elementaren Funktion. Siehe L. Fejér, Asymptotikus értékek meghatározásáról, *Mathematikai és természettudományi értesitő*, **27** (1909), S. 1—33., oder Sur une méthode de M. Darboux, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris,* **147** (1908), p. 1040—1042.

4) [Hinzugefügt am 17. Januar 1929.] Ich kann mit Hilfe einer anderen Methode auch die gleichmässig dichte Verteilung der Folge q_n beweisen, was ich für eine spätere Publikation vorbehalte.

Behauptung: für eine beliebige ganze Zahl l liegt die Folge der Bruchteile von $s_n^{(l)}$ im Intervall (0, 1) *überall dicht.*

II.

Um unseren Satz zu beweisen, beweisen wir das folgende Lemma, aus welchem durch vollständige Induktion unser Satz sofort gefolgert werden kann.

Lemma. *Wir bezeichnen mit s_n eine unendliche Folge von positiven Zahlen, mit σ_n die Folge der Bruchteile von s_n und setzen*

$$S_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n,$$
$$\Sigma_n = \text{Bruchteil von } S_n.$$

Wenn die Folge s_n die Eigenschaft besitzt, dass zu einer beliebig kleinen positiven δ sich zwei positive ganze Zahlen μ_1 und μ_2 angeben lassen derart, dass

$$0 \leqq \sigma_{\mu_1} \leqq \delta,$$
$$0 \leqq \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} \leqq \delta \qquad (\mu_1 < \nu \leqq \mu_2),$$
$$0 \leqq 1 - \sigma_{\mu_2} \leqq \delta,$$

so behaupten wir, dass die aus der Folge s_n abgeleitete Folge S_n ebenfalls diese Eigenschaft besitzt.

Laut Voraussetzung füllt die Folge σ_n das Intervall (0, 1) überall dicht aus, und zwar in einer spezifischen Weise. Das Lemma besagt, dass die Folge Σ_n das Intervall (0, 1) ebenfalls in dieser Art überall dicht ausfüllt.

Zum Beweise setzen wir $\delta = \frac{\varepsilon^2}{12}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Also ist

$$0 \leqq \sigma_{\mu_1} \leqq \frac{\varepsilon^2}{12}, \tag{1}$$

$$0 \leqq \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} \leqq \frac{\varepsilon^2}{12} \qquad (\mu_1 < \nu \leqq \mu_2), \tag{2}$$

$$0 \leqq 1 - \sigma_{\mu_2} \leqq \frac{\varepsilon^2}{12}. \tag{3}$$

Nach (1), (2) und (3) können wir eine natürliche Zahl ν_1 wählen von der Beschaffenheit, dass

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqq \sigma_{\nu_1} \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{12}, \qquad \mu_1 < \nu_1 < \mu_2. \tag{4}$$

Wir bezeichnen nun den ganzen Teil von $\frac{6}{\varepsilon}$ (den grössten ganzen Zahl $\leqq \frac{6}{\varepsilon}\Big)$, wie üblich, mit $\left[\frac{6}{\varepsilon}\right]$ und setzen

$$\nu_2 = \nu_1 + \left[\frac{6}{\varepsilon}\right] \leqq \nu_1 + \frac{6}{\varepsilon} < \nu_1 + \frac{6}{\varepsilon^2} - 1. \tag{5}$$

Aus (2), (3) und (4) folgt durch Addition

$$1 \leqq (\mu_2 - \nu_1 + 1)\frac{\varepsilon^2}{12} + \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$\nu_1 + \frac{6}{\varepsilon^2} - 1 \leqq \mu_2, \tag{6}$$

folglich weiter aus (5) und (6)

$$\nu_2 \leqq \mu_2. \tag{7}$$

Aus (2), (4) und (5) folgt noch weiter, dass

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqq \sigma_\nu \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{6}{\varepsilon}\,\frac{\varepsilon^2}{12} = \varepsilon \qquad (\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2), \tag{8}$$

$$\sigma_{\nu_1} + \sigma_{\nu_1+1} + \ldots + \sigma_{\nu_2} \geqq (\nu_2 - \nu_1 + 1)\frac{\varepsilon}{2} \geqq \frac{6}{\varepsilon}\,\frac{\varepsilon}{2} = 3 > 2. \tag{9}$$

Wir definieren Σ'_ν wie folgt:

$$\Sigma'_\nu = \Sigma_{\nu_1 - 1} + \sigma_{\nu_1} + \sigma_{\nu_1+1} + \ldots + \sigma_\nu \qquad (\nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2)$$

und bezeichnen mit ν_3 die kleinste natürliche Zahl $\geqq \nu_1$ für welche $\Sigma'_{\nu_3} \geqq 1$ und mit ν_4 die grösste natürliche Zahl $\leqq \nu_2$ für welche $\Sigma'_\nu \leqq 2$. Diese Wahl von ν_3 und ν_4 ist nach (9) möglich.

Es ist nach (8), (9)

$$0 \leqq \Sigma'_{\nu_3} - 1 \leqq \varepsilon, \qquad 0 \leqq 2 - \Sigma'_{\nu_4} \leqq \varepsilon, \tag{10}$$

$$0 \leqq \Sigma'_\nu - \Sigma'_{\nu-1} = \sigma_\nu \leqq \varepsilon, \qquad (\nu_3 \leqq \nu \leqq \nu_4). \tag{11}$$

Weil aber laut Definition von Σ_n

$$\Sigma_\nu = \Sigma'_\nu - 1 \qquad (\nu_3 \leqq \nu \leqq \nu_4),$$

so schreiben sich (10), (11) in anderer Bezeichnung

$$0 \leqq \Sigma_{\nu_3} \leqq \varepsilon,$$
$$0 \leqq \Sigma_\nu - \Sigma_{\nu-1} \leqq \varepsilon \qquad (\nu_3 \leqq \nu \leqq \nu_4),$$
$$0 \leqq 1 - \Sigma_{\nu_4} \leqq \varepsilon.$$

Q. e. d.

(*Eingegangen am 1. Januar 1929.*)