Über die Abschätzung der Koeffizientensumme Dirichletscher Reihen.

Von László Kalmár in Szeged.

Einleitung.

Manche Fragestellungen der analytischen Zahlentheorie führen zur Aufgabe, die Koeffizientensumme[1])

$$A(x) = \sum_{n \leqq x} a_n$$

einer in der Halbebene $\sigma > 1$ konvergenten Dirichletschen Reihe[2])

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

mit von unten beschränkten Koeffizienten[3]) unter Anwendung gewisser Eigenschaften der Funktion $a(s)$ möglichst scharf abzuschätzen. Das vielleicht berühmteste Problem dieser Art ist die Abschätzung der Differenz

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} \tag{2}$$

wo $\pi(x)$, wie üblich, die Anzahl der die positive Zahl x nicht übersteigenden Primzahlen bezeichnet. Dieses Problem wurde von

---

1) Eine Summationsvorschrift dieser Art ist in dem Sinne zu verstehen, dass der Summationsindex alle positiven oder nichtnegativen ganze Zahlen durchläuft, welche die angegebene Bedingung erfüllen, je nach der Bezeichnung n oder m.

2) s bezeichnet eine komplexe Veränderliche, σ und t ihre reelle bzw. imaginäre Komponente, also $s = \sigma + ti$.

3) Vgl. Fussnote [20]).

Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN gelöst,[4]) und zwar mit dem Ergebnis[5])

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right). \tag{3}$$

Er zeigte, dass die RIEMANNsche Zetafunktion, die bekanntlich für $\sigma > 1$ durch die DIRICHLETsche Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert wird, im Gebiete

$$\sigma \geqq 1 - \frac{c_2}{\log \operatorname{Max}(c_3, |t|)} \tag{4}$$

(wo sie, wie in der ganzen Ebene überhaupt, mit Ausnahme des Pols erster Ordnung $s = 1$, regulär bleibt,) nicht verschwindet, und gleichzeitig, dass aus dieser Eigenschaft, unter Anwendung weiterer tiefen Eigenschaften der Zetafunktion und der HADAMARDschen Theorie der ganzen Funktionen, die Abschätzung (3) folgt. Erst Herr LANDAU zeigte,[6]) dass aus diesem DE LA VALLÉE POUSSINschen Satze

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma \geqq 1 - \frac{c_2}{\log \operatorname{Max}(c_3, |t|)} \tag{5}$$

die Abschätzung (3) auch ohne diesen tiefen Hilfsmittel, allein durch Anwendung einiger elementaren Abschätzungen der Zetafunktion und durch Heranziehung des CAUCHYschen Integralsatzes hergeleitet werden kann. Ich gebe nun eine Methode an (Satz I.), die bei derartigen Übergängen von den analytischen Eigenschaften der erzeugenden Funktion $a(s)$ zur Abschätzung der Koeffizientensumme $A(x)$, also auch von (5) zu (3), auch die Ersparung des

---

[4]) CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, Sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, *Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, **59** (1899—1900). No. 1., p. 1—74.

[5]) Es bezeichnen in der Folge $c_1, c_2, \ldots, c_{90}$ positive Zahlen, welche nur von den in der Klammer angegebenen Parametern abhängen; diejenige ohne Klammer also absolute Konstanten.

[6]) E. LANDAU, Neue Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **27** (1909), S. 46—58., oder *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin 1909), Kap. XVIII; S. 324—333. Vgl. noch E. LANDAU, Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **26** (1908), S. 169—302., insbesondere S. 236—244.

CAUCHYschen Lehrsatzes ermöglicht und daher einen völlig elementaren Charakter hat.

Wäre die RIEMANNsche Vermutung

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma > \frac{1}{2}$$

oder auch nur

(6) $$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma > 1-\varepsilon$$

mit einem $\varepsilon > 0$ bewiesen, wäre also die erzeugende Funktion des Primzahlproblems (nämlich $\log \zeta(s) - \int_0^\infty (\zeta(s+u)-1)\,du$ oder $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$) über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus in einen ganzen Streifen $1-\varepsilon < \sigma \leqq 1$ analytisch fortsetzbar, so würde[7]) mit wesentlicher Ausnützung der Tatsache, dass dann diese erzeugende Funktion für $\sigma > 1-\varepsilon$ von endlichen Grössenordnung d. h. $O(|t|^{c_4})$ ist, die Abschätzung

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^\vartheta)$$

mit einem $\vartheta < 1$ folgen. Da man aber (6) zurzeit mit keinem $\varepsilon > 0$ beweisen kann, so muss man sich mit Abschätzungen von der Form

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(F(x))$$

begnügen, wo, wie auch im Falle der Abschätzung (3), mit keinem $\vartheta < 1$ $F(x) = O(x^\vartheta)$ gilt. Man bedient sich zur Erreichung einer solchen Abschätzung einer Eigenschaft der Zetafunktion von geringerer Tragweite als (6) mit einem noch so kleinen $\varepsilon > 0$, sozusagen einer „Interpolation" zwischen der Konvergenz der erzeugenden DIRICHLETschen Reihe für $\sigma > 1$ einerseits und (6) andererseits; z. B. der Eigenschaft (5), d. h. der Fortsetzbarkeit der bezüglichen erzeugenden Funktion in das Gebiet (4). Nun ist es aber leicht zu zeigen, dass eine Abschätzung wie etwa

$$A(x) = O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}})$$

gar nicht notwendig die analytische Fortsetzbarkeit der erzeugenden Funktion $a(s)$ jenseits der Geraden $\sigma = 1$ nach sich zieht (vgl.

[7]) E. LANDAU, Neue Beiträge usw. a. a. O. [6]), S. 53—58., oder *Handbuch* usw. a. a. O. [6]), Kap. XXI; S. 378—388. Vgl. noch H. VON KOCH, Sur la distribution des nombres premiers, *Acta Mathematica*, 24 (1901), p. 159—182.

Satz II.). Mit der elementaren Charakter meiner Methode hängt es nun zusammen, dass sie auch im Falle einer nichtfortsetzbaren erzeugenden Funktion[8]) anwendbar ist; dieselbe liefert sogar in einem sehr allgemeinen Falle eine bis auf den Wert einer gewissen Konstante *notwendige und hinreichende* Bedingung für die gültigkeit einer Abschätzung von gegebenen Form (vgl. Satz III.). Ich setze nämlich die Fortsetzbarkeit der Funktion $a(s)$ über das Konvergenzgebiet $\sigma > 1$ der Reihe (1) nicht voraus, sondern ich wähle eine andere „Interpolation" zwischen der Voraussetzung der blossen Konvergenz der Reihe (1) für $\sigma > 1$ und der Voraussetzung der Analytizität und der endlichen Grössenordnung der Funktion $a(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1 - \varepsilon$. Diese letztere Voraussetzung lässt sich nämlich auch, wie folgt, formulieren: Es soll der Differentialoperator

$$e^{-\varepsilon\frac{d}{ds}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon^m}{m!} \frac{d^m}{ds^m}$$

für die Funktion $a(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ sinnvoll sein, d. h. die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon^m}{m!} a^{(m)}(s) = e^{-\varepsilon\frac{d}{ds}} a(s)$$

soll für $\sigma > 1$ konvergieren und es soll dortselbst der Operatorwert die Ungleichung

$$|e^{-\varepsilon\frac{d}{ds}} a(s)| \leqq c_5 |s|^{c_4}$$

erfüllen. Meine Voraussetzung entsteht nun aus dieser letzteren dadurch, dass man den Differentialoperator $e^{-\varepsilon\frac{d}{ds}}$ durch einen „schwächeren", nämlich

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m \frac{d^m}{ds^m}$$

ersetzt, wo

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$$

eine für jedes x konvergente Potenzreihe ist, welche für positives $x \to \infty$ langsamer wächst, als jede Potenz von e^x.

Durch Anwendung meines Satzes I. kann man, wie ich in **10.** zeigen werde, eine Abschätzung von (2) von der Form

---

[8]) Dass nichtfortsetzbare erzeugende Funktionen zur Herleitung asymptotischer Formeln verwendet werden können, zeigen die schönen Arbeiten von HARDY und LITTLEWOOD über additive Zahlentheorie.

$$(7) \qquad \pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-\sqrt[\alpha]{\log x}}\right)$$

(mit $\alpha = 14$)[9]) elementarer als bisher beweisen. Zum Beweise von (3) hat Herr de la Vallée Poussin, wie erwähnt, tiefe Hilfsmittel der Theorie der ganzen Funktionen herangezogen; aber auch der Beweis des Primzahlsatzes selbst:

$$(8) \qquad \pi(x) \sim \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

ging bei ihm,[10]) und gleichzeitig bei Herrn Hadamard[11]) nicht viel billiger. Erst Herr Landau war imstande,[12]) den Primzahlsatz und sogar auch eine Restabschätzung von der Form (7) (mit etwas, aber gewiss nicht bis zu 2 verkleinerbarem $\alpha = 13$) unter alleiniger Benützung klassischer funktionentheoretischen Methoden und einiger naheliegenden Eigenschaften der Zetafunktion zu beweisen. Später bewies er[13]) durch ebenfalls elementar-funtktionentheoretische Methoden auch (3), und sogar[14]) auch die noch schärfere Littlewoodsche[15]) Abschätzung

---

9) Über die Verkeinerung des Wurzelexponenten gilt hier genau dasselbe, wie für die zu erwähnende Landausche Methode; siehe E. Landau, *Handbuch* usw. a. a. O. 6). § 65.; S. 242—258.

10) Ch. de la Vallée Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, première partie, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, **20**, 2e Partie (1896), p. 183—256.

11) J. Hadamard, Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 24 (1896), p. 199—220.

12) E. Landau, Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, *Matematische Annalen*, **56** (1903), S. 645—670., oder *Handbuch* usw. a. a. O. 6), Kap. XI und XII; S. 151—197.

13) Es kommt, gemäss den oben gesagten, auf einem elementar-funktionentheoretischen Beweis von (5) hinaus: E. Landau, Über die Wurzeln der Zetafunktion, *Mathematische Zeitschrift*, **20** (1924), S. 98—104., insbesondere § 4., oder *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig 1927), Bd. 2., S. 9—27., wo eine Verallgemeinerung von (3) (für die Primzahlen einer arithmetischen Progression) mit denselben Methoden bewiesen ist.

14) E. Landau, Über die ζ-Funktion und die L-Funktion, *Mathematische Zeitschrift*, **20** (1924), S. 105—125., oder (allgemeiner) *Vorlesungen* usw. a. a. O. 13), Bd. 2., S. 31—47.

15) J. E. Littlewood, Researches in the Theory of the Riemann ζ-Function, *Proceedings of the London Mathematical Society*, II. **20** (1922), Records of proceedings at meetings p. XXII—XXVIII, insbesondere p. XXV, wo die wesentlichste analytische Hilfsmittel dieser Abschätzung ohne Beweis ausgesprochen ist.

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(xe^{-c_6\sqrt{\log x \log\log x}}\right).$$

Ausserdem hat Herr LANDAU den Beweis des Primzahlsatzes (8) in solchem Maasse vereinfacht,[16]) dass man selbst ohne Anwendung des CAUCHYschen Integralsatzes und sogar ohne den Begriff einer analytischen Funktion auskommt. Was aber die Restabschätzung betrifft, gelangt man auf seinem Wege gewiss nicht zu (7), dessen funktionentheoriefreien Beweis ich in **10.** kurz skizzieren werde.

I. Ein Satz über Dirichletschen Reihen.

1. Es sei dauernd

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$$

eine nicht identisch verschwindende, für jedes x konvergente Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten, welche für positiv-reelles $x \to \infty$[17]) mit jedem positiven ε die Bedingung

$$P(x) = O(e^{\varepsilon x}) \tag{9}$$

erfüllt.

Hilfssatz I. *Ist*

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine für $\sigma > 1$ *absolut konvergente* DIRICHLET*sche Reihe, so ist der Differentialoperator*

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m \frac{d^m}{ds^m}$$

in der Halbebene $\sigma > 1$ *für die Funktion* $a(s)$ *sinnvoll, d. h. die Reihe*

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m a^{(m)}(s)$$

ist für $\sigma > 1$ *konvergent; ferner wird der Operatorwert, d. h. die*

[16]) E. LANDAU, Über die Bedeutung einigen neuen Grenzwertsätze der Herren HARDY und AXER, *Prace Matematyczno-Fizycznych*, 21 (1910), S. 97—177., insbesondere Satz XVIII; und Sobre los números primos en progresión aritmética, *Revista Matemática Hispano-Americana*, 4 (1923), 56 S.

[17]) Die Abschätzungen und asymptotische Formeln sind im Folgenden, wenn nicht anders angegeben wird, für positiv-reelles $x \to \infty$ zu verstehen.

Summe der obigen Reihe für $\sigma > 1$ durch die DIRICHLET*sche Reihe*

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P(\log n)}{n^s}$$

dargestellt.

Beweis. Die Doppelreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n p_m \log^m n}{n^s} \tag{10}$$

ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent, da

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n p_m \log^m n}{n^s} \right| = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| p_m \log^m n}{|n^\sigma}$$

in der Anordnung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \log^m n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| P(\log n)}{n^\sigma}$$

wegen

$$\frac{|a_n| P(\log n)}{n^\sigma} = O\left(\frac{|a_n| e^{1/2(\sigma-1)\log n}}{n^\sigma}\right) = O\left(\frac{|a_n|}{n^{1/2(\sigma+1)}}\right)$$

konvergiert. Also ist die Summe der Doppelreihe (10) jeder der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log^m n}{n^s} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m a^{(m)}(s),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \log^m n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P(\log n)}{n^s}$$

gleich.

Hilfssatz II. *Die* DIRICHLET*sche Reihe*

$$b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

sei in der Halbebene $\sigma > 1$ absolut[18]) *konvergent und erfülle dortselbst eine Ungleichung*

$$|b(s)| \leq c_7 |s|^\varkappa \qquad (\varkappa > 0). \tag{11}$$

Dann ist für ganzes $K > \varkappa$

$$\sum_{n \leq x} b_n \log^K \frac{x}{n} = O(x).$$

Beweis. Bekanntlich[19]) gilt für jedes $\eta > 0$

---

[18]) Die absolute Konvergenz ist zwar gar nicht notwendig, es genügt aber für meine Zwecke, allein diesen Fall zu betrachten.

[19]) Vgl. z. B. E. LANDAU, *Handbuch* usw. a. a. O. [6]), S. 268.

$$\sum_{n\leq x} b_n \log^K \frac{x}{n} = \frac{K!}{2\pi i} \int\limits_{1+\eta-\infty i}^{1+\eta+\infty i} \frac{x^s}{s^{K+1}} b(s)\, ds, \tag{12}$$

daher ist wegen (11)

$$\left|\sum_{n\leq x} b_n \log^K \frac{x}{n}\right| \leq \frac{K!}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_7 x^{1+\eta}}{|1+\eta+ti|^{1+K-\varkappa}} dt \leq$$

$$\leq \frac{c_7 K!}{2\pi} x^{1+\eta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|1+ti|^{1+K-\varkappa}};$$

hieraus folgt durch $\eta \to 0$

$$\left|\sum_{n\leq x} b_n \log^K \frac{x}{n}\right| \leq \frac{c_7 K!}{2\pi} x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|1+ti|^{1+K-\varkappa}}.$$

Hilfssatz III. *Es ist*

$$P(x+1) = O(P(x)),$$
$$P'(x) = O(P(x)).$$

Beweis. Wegen (9) ist speziell

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \leq c_8 e^{1/_8 x}$$

für $x > 0$, also umsomehr

$$p_m \leq c_8 \frac{e^{1/_8 x}}{x^m} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Setzt man hier $x = 3m$, so folgt

$$p_m \leq c_8 \left(\frac{e}{3m}\right)^m \qquad (m > 0).$$

Daher ist für $x \geq 1$

$$P(x+1) = \sum_{m\leq x+1} p_m (x+1)^m + \sum_{m > x+1} p_m (x+1)^m \leq$$

$$\leq \sum_{m\leq x+1} p_m x^m \left(1+\frac{1}{x}\right)^m + \sum_{m>x+1} c_8 \left(\frac{e}{3} \frac{x+1}{m}\right)^m \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_8 \left(\frac{e}{3}\right)^m \leq$$

$$\leq c_9 P(x) + c_{10} \leq c_{11} P(x),$$

und

$$P'(x) = \sum_{m \leqq x} m p_m x^{m-1} + \sum_{m > x} m p_m x^{m-1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m \leqq x} p_m x^m \frac{m}{x} + \sum_{m > x} c_8 m \left(\frac{e}{3} \frac{x}{m}\right)^m \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_8 m \left(\frac{e}{3}\right)^m \leqq$$

$$\leqq P(x) + c_{12} \leqq c_{13} P(x).$$

Hilfssatz IV. *Für* $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ *und ganzes* $k \geqq 2$ *ist*

$$0 \leqq (u+v)^k - u^k - k u^{k-1} v \leqq c_{14}(k) v^2 (u+v)^{k-2},$$

$$0 \leqq k (u+v)^{k-1} v - (u+v)^k + u^k \leqq c_{15}(k) v^2 (u+v)^{k-2}.$$

Beweis. Es ist

$$(u+v)^k - u^k - k u^{k-1} v = v^2 \sum_{r=0}^{k-2} \binom{k}{r+2} u^{k-2-r} v^r,$$

und

$$k(u+v)^{k-1} v - (u+v)^k + u^k = v^2 \sum_{r=0}^{k-2} \left(k \binom{k-1}{r+1} - \binom{k}{r+2}\right) u^{k-2-r} v^r =$$

$$= v^2 \sum_{r=0}^{k-2} (r+1) \binom{k}{r+2} u^{k-2-r} v^r.$$

Hilfssatz V. *Es sei* $k > 0$ *ganz,* $Q(x)$ *und* $R(x)$ *positive, nichtabnehmende Funktionen von* x, *welche*

(13) $$R(x) = o(Q(x))$$

und

(14) $$Q(2x) = O(Q(x)), \quad R(2x) = O(R(x))$$

genügen; ferner

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

eine Folge reeller Zahlen,

(15) $$b_n \geqq -Q(n) \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

und

(16) $$\sum_{n \leqq x} b_n \log^k \frac{x}{n} = O(x R(x)).$$

Dann ist

$$\sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} = O(x \sqrt{Q(x) R(x)}).$$

Beweis. Es sei $\lambda = \lambda(x)$ eine später zu bestimmende positive Funktion, welche für $x \to \infty$ gegen Null strebt. Dann ist wegen (16) und (14)

$$\sum_{n \leq x+\lambda x} b_n \log^k \frac{x+\lambda x}{n} = O(x+\lambda x)R(x+\lambda x)) = O(xR(x)),$$

$$\sum_{n \leq x-\lambda x} b_n \log^k \frac{x-\lambda x}{n} = O((x-\lambda x)R(x-\lambda x)) = O(xR(x));$$

daher gilt für $x > c_{16}$ $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ und

$$\sum_{n \leq x+\lambda x} b_n \log^k \frac{x+\lambda x}{n} - \sum_{n \leq x} b_n \log^k \frac{x}{n} \leq c_{17} xR(x), \tag{17}$$

$$\sum_{n \leq x-\lambda x} b_n \log^k \frac{x-\lambda x}{n} - \sum_{n \leq x} b_n \log^k \frac{x}{n} \leq c_{18} xR(x). \tag{18}$$

Ferner ist im Falle $k \geq 2$ nach Hilfssatz IV. für $1 \leq n \leq x$

$$0 \leq \log^k \frac{x+\lambda x}{n} - \log^k \frac{x}{n} - k \log(1+\lambda) \log^{k-1} \frac{x}{n} \leq$$
$$\leq c_{14}(k) \log^2(1+\lambda) \log^{k-2} \frac{x+\lambda x}{n}$$

und für $1 \leq n \leq x - \lambda x$ $(x > c_{10})$

$$0 \leq k \log \frac{1}{1-\lambda} \log^{k-1} \frac{x}{n} - \log^k \frac{x}{n} + \log^k \frac{x-\lambda x}{n} \leq$$
$$\leq c_{15}(k) \log^2 \frac{1}{1-\lambda} \log^{k-2} \frac{x}{n};$$

also, wegen (15),

$$-\sum_{n \leq x} b_n \left(\log^k \frac{x+\lambda x}{n} - \log^k \frac{x}{n} - k \log(1+\lambda) \log^{k-1} \frac{x}{n} \right) \leq$$
$$\leq c_{14}(k) \log^2(1+\lambda) \sum_{n \leq x} Q(n) \log^{k-2} \frac{x+\lambda x}{n} \leq$$
$$\leq c_{14}(k) Q(x) \log^2(1+\lambda) \sum_{n \leq x+\lambda x} \log^{k-2} \frac{x+\lambda x}{n},$$

$$-\sum_{n \leq x-\lambda x} b_n \left(k \log \frac{1}{1-\lambda} \log^{k-1} \frac{x}{n} - \log^k \frac{x}{n} + \log^k \frac{x-\lambda x}{n} \right) \leq$$
$$\leq c_{15}(k) \log^2 \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n \leq x-\lambda x} Q(n) \log^{k-2} \frac{x}{n} \leq$$
$$\leq c_{15}(k) Q(x) \log^2 \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n \leq x} \log^{k-2} \frac{x}{n}.$$

Hier ist

$$\sum_{n\leqq x} \log^{k-2}\frac{x}{n} \leqq \int_0^x \log^{k-2}\frac{x}{u}\,du = x\int_0^\infty v^{k-2}e^{-v}\,dv,$$

also auch

$$\sum_{n\leqq x+\lambda x} \log^{k-2}\frac{x+\lambda x}{n} \leqq (x+\lambda x)\int_0^\infty v^{k-1}e^{-v}\,dv.$$

Daher gilt für $k\geqq 2$, aber auch für $k=1$, da dann auf der linken Seite Null steht,

$$(19)\quad \begin{aligned} -\sum_{n\leqq x} b_n\log^k\frac{x+\lambda x}{n} + \sum_{n\leqq x} b_n\log^k\frac{x}{n} + k\log(1+\lambda)\sum_{n\leqq x} b_n\log^{k-1}\frac{x}{n} \leqq \\ \leqq c_{19}(k)\,x\,Q(x)\log^2(1+\lambda) \leqq c_{20}(k)\,\lambda x\,Q(x)\log(1+\lambda), \end{aligned}$$

$$(20)\quad \begin{aligned} -k\log\frac{1}{1-\lambda}\sum_{n\leqq x-\lambda x} b_n\log^{k-1}\frac{x}{n} + \\ + \sum_{n\leqq x-\lambda x} b_n\log^k\frac{x}{n} - \sum_{n\leqq x-\lambda x} b_n\log^k\frac{x-\lambda x}{n} \leqq \\ \leqq c_{21}(k)\,x\,Q(x)\log^2\frac{1}{1-\lambda} \leqq c_{22}(k)\,\lambda x\,Q(x)\log\frac{1}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Endlich ist für $x > c_{16}$

$$(21)\quad \begin{aligned} -\sum_{x<n\leqq x+\lambda x} b_n\log^k\frac{x+\lambda x}{n} \leqq \sum_{x<n\leqq x+\lambda x} Q(n)\log^k\frac{x+\lambda x}{n} \leqq \\ \leqq \lambda x\,Q(x+\lambda x)\log^k(1+\lambda) \leqq c_{23}(k)\,\lambda x\,Q(x)\log(1+\lambda), \end{aligned}$$

und, da für $x-\lambda x < n \leqq x$

$$k\log^{k-1}\frac{x}{n}\log\frac{1}{1-\lambda} - \log^k\frac{x}{n} \geqq \log^{k-1}\frac{x}{n}\log\frac{x}{x-\lambda x} - \log^k\frac{x}{n} \geqq 0$$

ist,

$$\begin{aligned} -\sum_{x-\lambda x<n\leqq x} b_n\left(k\log^{k-1}\frac{x}{n}\log\frac{1}{1-\lambda} - \log^k\frac{x}{n}\right) \leqq \\ \leqq \sum_{x-\lambda x<n\leqq x} Q(n)\left(k\log^{k-1}\frac{x}{n}\log\frac{1}{1-\lambda} - \log^k\frac{x}{n}\right) \leqq \\ \leqq k\lambda x\,Q(x)\log^{k-1}\frac{x}{x-\lambda x}\log\frac{1}{1-\lambda}, \end{aligned}$$

d. h.

$$(22)\quad \begin{aligned} -k\log\frac{1}{1-\lambda}\sum_{x-\lambda x<n\leqq x} b_n\log^{k-1}\frac{x}{n} + \sum_{x-\lambda x<n\leqq x} b_n\log^k\frac{x}{n} \leqq \\ \leqq k\lambda x\,Q(x)\log^k\frac{1}{1-\lambda} \leqq c_{24}(k)\,\lambda x\,Q(x)\log\frac{1}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Aus (17), (19), (21) bzw. aus (18), (20), (22) folgt durch Addition für $x > c_{16}$

$$k \log(1+\lambda) \sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} \leqq c_{17} x R(x) + c_{25}(k) \lambda x Q(x) \log(1+\lambda)$$

bzw.

$$-k \log \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} \leqq c_{18} x R(x) + c_{26}(k) \lambda x Q(x) \log \frac{1}{1-\lambda}.$$

Also ist wegen

$$\frac{1}{\log(1+\lambda)} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \frac{1}{\log \frac{1}{1-\lambda}} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\left| \sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} \right| \leqq c_{27} \frac{x}{\lambda} R(x) + c_{28}(k) \lambda x Q(x). \tag{23}$$

Wählt man, am günstigsten,

$$\lambda = \sqrt{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

(wegen (13) wird dann $\lambda \to 0$ erfüllt), so wird

$$\frac{x}{\lambda} R(x) = \lambda x Q(x) = x \sqrt{Q(x) R(x)},$$

und es ergibt sich aus (23)

$$\sum_{n \leqq x} b_n \log^{k-1} \frac{x}{n} = O(x \sqrt{Q(x) R(x)}).$$

2. Nun beweise ich den

Satz I. *Es sei die* Dirichlet*sche Reihe mit von unten beschränkten Koeffizienten*[20])

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{24}$$

[20]) Wörtlich ebenso kann man den allgemeineren Fall, wo statt dieser Voraussetzung

$$a_n \geqq -Q(n)$$

gilt, wo $Q(x)$ eine positive monoton nichtabnehmende Funktion von x mit der Eigenschaft

$$Q(2x) = O(Q(x))$$

bedeutet, behandeln; und zwar mit dem Ergebnis

$$A(x) = O\left(\frac{x\,Q(x)}{\{P(c_{30} \log x)\, Q(x)\}^{2^{-[\varkappa+1]}}}\right)$$

statt (26).

in der Halbebene $\sigma > 1$ *konvergent und erfülle dortselbst die Ungleichung*

$$(25)\qquad \left| P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) \right| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m a^{(m)}(s) \right| \leqq c_{29} |s|^{\varkappa} \qquad (\varkappa > 0),$$

wo

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$$

eine sich nicht auf eine Konstante reduzierende[21]) *Potenzreihe ist mit nichtnegativen Koeffizienten, welche für jedes* x *konvergiert und für reelles* $x \to +\infty$ *mit jedem positiven* ε

$$P(x) = O(e^{\varepsilon x})$$

erfüllt.

Dann gilt für die Koeffizientensumme der Reihe (24) *mit jedes* $c_{30} < 1$ *die Abschätzung*

$$(26)\qquad A(x) = \sum_{n \leqq x} a_n = O\left(\frac{x}{\{P(c_{30} \log x)\}^{2^{-[\varkappa+1]}}} \right).$$

Vorbemerkung. Der Operatorwert

$$P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p_m a^{(m)}(s)$$

existiert für $\sigma > 1$ nach dem Hilfssatze I. und es ist

$$(27)\qquad P\left(-\frac{d}{ds}\right) a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P(\log n)}{n^s},$$

da die Reihe (24) wegen

$$a_n \geqq -c_{31},$$

$$\left| \frac{a_n}{n^s} \right| = \frac{|(a_n + c_{31}) - c_{31}|}{n^\sigma} \leqq \frac{|a_n + c_{31}| + |c_{31}|}{n^\sigma} = \frac{a_n}{n^\sigma} + \frac{2c_{31}}{n^\sigma}$$

in der Halbebene $\sigma > 1$ absolut konvergent ist.

Beweis. Nach dem Hilfssatze II., mit $b_n = a_n P(\log n)$, folgt aus (25) und (27)

$$\sum_{n \leqq x} a_n P(\log n) \log^{[\varkappa+1]} \frac{x}{n} = O(x),$$

also, $K = [\varkappa + 1]$ gesetzt,

---

[21]) Es wäre leicht den Beweis so zu formulieren, dass auch der Fall, wo $P(x)$ eine von Null verschiedene Konstante (etwa 1) ist, nicht ausgeschlossen bleibt: Hilfssatz V. gilt nämlich (mit den alten Beweis, aber $\lambda = 1/2$) auch für $Q(x) = c_{31}$, $R(x) = 1$.

(28) $$\sum_{n\leqq x} a_n P(\log n)\log^k \frac{x}{n} = O(x\{P(\log x)\}^{1-2^{k-K}})$$

mit $k=K$. Ist (28) mit irgendeinem ganzen $k\geqq 1$ (aber $k\leqq K$) schon bewiesen, so wenden wir den Hilfssatz V. mit diesem k, $Q(x)=c_{31}P(\log x)$, $R(x)=\{P(\log x)\}^{1-2^{k-K}}$ an. Dies ist möglich, da $b_n=a_nP(\log n)\geqq -c_{31}P(\log n)$, ferner wegen $P(x)\to\infty$

$$R(x)=o(Q(x))$$

und endlich nach dem Hilfssatze III.

$$P(\log 2x)\leqq P(\log x+1)=O(P(\log x)),$$

also

$$Q(2x)=O(Q(x)),\ R(2x)=O(R(x))$$

ist. Es ergibt sich

$$\sum_{n\leqq x} a_n P(\log n)\log^{k-1}\frac{x}{n}=O(x\{P(\log x)\}^{1-2^{k-1-K}}),$$

d. h. (28) mit $k-1$ statt k. Also ist (28) auch für $k=0$ gültig, d. h. es ist

$$S(x)=\sum_{n\leqq x} a_n P(\log n)=O(x\{P(\log x)\}^{1-2^{-K}}).$$

Eine partielle Summation ergibt nun

$$A(x)=\sum_{n\leqq x} a_n = a_1+\sum_{2\leqq n\leqq x}\frac{S(n)-S(n-1)}{P(\log n)}=$$

$$=a_1\left(1-\frac{1}{P(\log 2)}\right)+\sum_{2\leqq n\leqq x} S(n)\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right)+$$

$$+\frac{S(x)}{P(\log[x+1])}=$$

(29) $$=O\left(\frac{x}{\{P(\log x)\}^{2^{-K}}}\right)+$$

$$+O\sum_{2\leqq n\leqq x} n\{P(\log n)\}^{1-2^{-K}}\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right).$$

Hier ist

$$\sum_{2\leqq n\leqq x^{c_{30}}} n\{P(\log n)\}^{1-2^{-K}}\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right)\leqq$$

$$\leqq x^{c_{30}}\{P(c_{30}\log x)\}^{1-2^{-K}}\sum_{2\leqq n\leqq x^{c_{30}}}\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right)\leqq$$

$$\leqq\frac{x}{\{P(c_{30}\log x)\}^{2^{-K}}}\,\frac{P(\log x)}{x^{1-c_{30}}}\,\frac{1}{P(\log 2)}=O\left(\frac{x}{\{P(c_{30}\log x)\}^{2^{-K}}}\right),$$

und

$$\sum_{x^{c_{30}}<n\leqq x} n\{P\log n)\}^{1-2^{-K}}\left(\frac{1}{P(\log n)}-\frac{1}{P(\log(n+1))}\right)\leqq$$

$$\leqq x\sum_{x^{c_{30}}<n\leqq x}\{P(\log n)\}^{1-2^{-K}}\int\limits_{n}^{n+1}\frac{1}{\{P(\log u)\}^2}\frac{d}{du}\{P(\log u)\}\,du\leqq$$

$$\leqq x\int\limits_{x^{c_{30}}}^{\infty}\frac{1}{\{P(\log u)\}^{1+2^{-K}}}\frac{d}{du}\{P(\log u)\}\,du=\frac{2^K x}{\{P(c_{30}\log x)\}^{2^{-K}}};$$

also folgt (26) aus (29).

II. Umkehrbarkeitsbetrachtungen.

3. Der Satz I. liefert eine Methode, die Koeffizientensumme der DIRICHLETschen Reihe (24) als $O(F(x))$ abzuschätzen, wo $F(x)=o(x)$, aber bei keinem $\vartheta<1$ $F(x)=O(x^\vartheta)$ ist; und zwar unter Benützung ausschliesslich solcher Eigenschaften der Funktion $a(s)$, welche sich auf das Benehmen derselben in dem Konvergenzbereich $\sigma>1$ der Reihe (24) beziehen, aber nicht etwa analytische Fortsetzbarkeit von $a(s)$ jenseits der Geraden $\sigma=1$ fordern. Bevor ich die Notwendigkeit der Voraussetzungen des Satzes I. (wenigstens in einem wichtigen Speziellfalle und in einem gewissen Sinne) untersuche, zeige ich, dass für eine Abschätzung dieser Art sicher keine Fortsetzbarkeitsbedingung notwendig sein kann.

Satz II. *Es sei $F(x)$ eine für $x>1$ definierte positive nichtabnehmende Funktion von x, welche der Relation $F(x)=O(x)$, aber mit keinem $\vartheta<1$ einer Relation $F(x)=O(x^\vartheta)$ genügt. Dann gibt es eine in der Halbebene $\sigma>1$ konvergente* DIRICHLET*sche Reihe*

(30) $$a(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

mit von unten beschränkten (sogar nichtnegativen) Koeffizienten, für deren Koeffizientensumme die Abschätzung

$$A(x)=\sum_{n\leqq x}a_n=O(F(x))$$

gilt, obwohl $a(s)$ in keinem Punkte, des Geraden $\sigma=1$ regulär ist.

Beweis. Es sei die Folge

$$l_1,\ l_2,\ldots,l_\nu,\ldots$$

positiver ganzer Zahlen so gewählt, dass

$$l_1 = 1,$$

$$F(l_{\nu+1}) \geqq F(l_1) + F(l_2) + \ldots + F(l_\nu) \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots$$

und

$$l_{\nu+1} \geqq \nu l_\nu$$

gelte. Das ist wegen $F(x) \to \infty$ möglich. Die DIRICHLETsche Reihe

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F(l_\nu)}{l_\nu^s}$$

konvergiert sicher in keinem Punkte der Halbebene $\sigma > 1$, da dort nicht einmal das allgemeine Glied derselben gegen Null strebt. Es ist für $l_\mu \leqq x < l_{\mu+1}$

$$0 \leqq \sum_{n \leqq x} a_n = \sum_{\nu=1}^{\mu} F(l_\nu) \leqq 2F(l_\mu) \leqq 2F(x),$$

also

$$\sum_{n \leqq x} a_n = O(F(x)).$$

Wegen $F(x) = O(x)$ ist also die Reihe (3) für $\sigma > 1$ konvergent. Da für $\nu \to \infty$

$$\frac{l_{\nu+1}}{l_\nu} \to \infty$$

gilt, so existiert die Funktion $a(s)$ nach dem Lückensatze des Herrn WENNBERG[22]) nicht ausserhalb der Konvergenzhalbebene der Reihe (30).

4. Nun werde ich die Umkehrbarkeit des Satzes I. untersuchen. Ich lege gar kein Gewicht auf möglichst allgemeine Formulierung, daher beschränke ich mich auf den Speziellfall, dass es für die Funktion $P(x)$ eine Auschätzung

$$\{P(x)\}^4 = O(P(c_{32}x)) \tag{31}$$

gilt. Demgemäss betrachte ich eine DIRICHLETsche Reihe

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{32}$$

---

22) S. WENNBERG, *Zur Theorie der DIRICHLETschen Reihen* (Uppsala 1920); S. 1—7. Verallgemeinerungen wurden gegeben von F. CARLSON und E. LANDAU, Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des FABRYschen Lückensatzes, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, 1921, S. 184—188., sowie von O. SZÁSZ, Über Singularitäten von Potenzreihen und DIRICHLETschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches, *Mathematische Annalen*, **85** (1922), S. 99—110.

mit von unten beschränkten Koeffizienten, für deren Koeffizientensumme die Abschätzung

$$A(x) = \sum_{n \leqq x} a_n = O\left(\frac{x}{P(c_{33} \log x)}\right) \tag{33}$$

gilt (was im unseren Falle eine Konsequenz einer Abschätzung von der Form (26) ist). Dann ist die Reihe (32) für $\sigma > 1$ konvergent, und zwar (vgl. die Vorbemerkung des Satzes I.) absolut konvergent.

Es sei c_{34} eine später zu bestimmende positive Konstante. Nach dem Hilfssatze I. ist für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} P\left(-c_{34} \frac{d}{ds}\right) a(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n P(c_{34} \log n)}{n^s} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A(n) - A(n-1)) \frac{P(c_{34} \log n)}{n^s} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A(n) \left(\frac{P(c_{34} \log n)}{n^s} - \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{(n+1)^s}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Hier ist

$$\frac{P(c_{34} \log n)}{n^s} - \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{(n+1)^s} = \int_n^{n+1} \frac{s P(c_{34} \log u) - c_{34} P'(c_{34} \log u)}{u^{s+1}} du,$$

also, da nach dem Hilfssatze III. für $u \geqq 2$

$$P'(c_{34} \log u) \leqq c_{35} P(c_{34} \log u)$$

gilt,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{P(c_{34} \log n)}{n^s} - \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{(n+1)^s}\right| \leqq \\ &\leqq (|s| + c_{34} c_{35}) \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{n^{\sigma+1}} \leqq c_{36} |s| \frac{P(c_{34} \log (n+1))}{n^2} \end{aligned} \tag{35}$$

für $n \geqq 2$, aber, mit geeignetem c_{36}, offenbar auch für $n = 1$. Wird also die Konstante c_{34} so gewählt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{n^2} P(c_{34} \log (n+1))$$

konvergiere, so ist für $\sigma > 1$ wegen (34) und (35)

$$\left|P\left(-c_{34} \frac{d}{ds}\right) a(s)\right| \leqq c_{36} |s| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{n^2} P(c_{34} \log (n+1)) = c_{37} |s|. \tag{36}$$

Eine solche Wahl von c_{34} ist aber, wenn $P(x)$ wieder keine Konstante ist, möglich. Denn es ist nach (33) und (31)

$$\frac{A(n)}{n^2} P(c_{31} \log (n+1)) = O\left(\frac{1}{n} \frac{P(c_{34} \log n + 1)}{P(c_{33} \log n)}\right) =$$
$$= O\left(\frac{1}{n} \frac{P(c_{34} \log n)}{P(c_{33} \log n)}\right) =$$
$$= O\left(\frac{1}{n} \frac{1}{\{P(c_{34} \log n)\}^3} \frac{\{P(c_{34} \log n)\}^4}{P(c_{33} \log n)}\right) =$$
$$= O\left(\frac{1}{n \log^3 n} \frac{P(c_{32} c_{34} \log n)}{P(c_{33} \log n)}\right),$$

also im Falle $c_{34} = \frac{c_{33}}{c_{32}}$ gleich $O\left(\frac{1}{n \log^3 n}\right)$.

Da nach dem Satze I. auch umgekehrt aus (36) für jedes $c_{38} < c_{34}$ die Abschätzung

$$A(x) = O\left(\frac{x}{\{P(c_{38} \log x)\}^{1/4}}\right) =$$
$$= O\left(\frac{x}{P\left(\frac{c_{38}}{c_{32}} \log x\right)} \left\{\frac{\left\{P\left(\frac{c_{38}}{c_{32}} \log x\right)\right\}^4}{P(c_{38} \log x)}\right\}^{1/4}\right) = O\left(\frac{x}{P\left(\frac{c_{38}}{c_{32}} \log x\right)}\right)$$

folgt, so gilt der

Satz III. *Es sei*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

eine von unten beschränkte Folge reeller Zahlen, ferner

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$$

eine für jedes x *konvergente nichtkonstante,*

$$P(x) = O(e^{\varepsilon x})$$

für jedes $\varepsilon > 0$ *und*

$$\{P(x)\}^4 = O(P(c_{32} x))$$

erfüllende Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten.

Dann ist es, damit für irgendeine positive Konstante c_{39} *die Abschätzung*

$$A(x) = O\left(\frac{x}{P(c_{39} \log x)}\right)$$

gelte, notwendig und hinreichend, dass die DIRICHLET*sche Reihe*

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

in der Halbebene $\sigma > 1$ *konvergiere und dortselbst mit geeigneten positiven Konstanten* c_{40} *und* c_{41} *die Ungleichung*

$$\left|P\left(-c_{40}\frac{d}{ds}\right)a(s)\right| = \left|\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m c_{40}^m p_m a^{(m)}(s)\right| \leqq c_{41}|s|$$

erfülle.

Es gibt also nach dem Satze II. auch jenseits der Geraden $\sigma = 1$ nicht fortsetzbare Dirichletsche Reihen, welche eine solche Ungleichung erfüllen, d. h. diese Ungleichung verlangt weniger, als Fortsetzbarkeit der Funktion $a(s)$ über die Gerade $\sigma = 1$ hinaus; was man übrigens auch direkt zeigen kann.

III. Anwendungen.

5. Es sei dauernd, wie bisher,

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

eine für $\sigma > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe mit von unten beschränkten Koeffizienten, ferner

$$A(x) = \sum_{n \leqq x} a_n$$

die Koeffizientensumme derselben.

Aus dem Satze I. folgt im Speziellfalle

$$P(x) = x^m$$

Satz IV. *Ist in der Halbebene* $\sigma > 1$

$$|a^{(m)}(s)| \leqq c_{42}|s|^{\varkappa} \qquad (m > 0,\ \varkappa > 0),$$

so gilt die Abschätzung

$$A(x) = O\left(\frac{x}{\log^{2-\frac{[\varkappa+1]}{m}} x}\right).$$

Corollar. *Ist in der Halbebene* $\sigma > 1$ *für jedes* $m > 0$ *mit demselben* $\varkappa > 0$

$$|a^{(m)}(s)| \leqq c_{43}(m)|s|^{\varkappa},$$

so gilt

(37) $$A(x) = O\left(\frac{x}{\log^{\nu} x}\right) \text{ für jedes } \nu \gtreqless 0.$$

Der Satz III. ist zwar in diesem Falle nicht anwendbar, aber man kann doch, wie in **4.**, zeigen, dass dieses Corollar eine nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige Bedingung für (37) liefert.

6. Als einen anderen Speziellfall betrachte ich

$$P(x) = E_\alpha(c_{44}x) \qquad (\alpha > 1),$$

wo $E_\alpha(x)$ die MITTAG-LEFFLERsche Funktion

$$E_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(\alpha m + 1)} \tag{38}$$

bedeutet. Es gilt[23])

$$E_\alpha(x) \sim \frac{1}{\alpha} e^{\sqrt[\alpha]{x}}, \tag{39}$$

also

$$P(x) \sim \frac{1}{\alpha} e^{\sqrt[\alpha]{c_{44}x}} = O(e^{\varepsilon x})$$

für jedes $\varepsilon > 0$; ferner

$$\{P(x)\}^4 \sim \frac{1}{\alpha^4} e^{4\sqrt[\alpha]{c_{44}x}} = O(P(4^\alpha x)),$$

also folgt aus dem Satze I. und III. folgender

Satz V. *Genügt die Funktion $a(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ der Ungleichung*

$$\begin{aligned} &\left| E_\alpha\left(-c_{44}\frac{d}{dx}\right) a(s) \right| = \\ &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_{44}^m}{\Gamma(\alpha m + 1)} a^{(m)}(s) \right| \leqq c_{45}|s|^\varkappa \qquad (\varkappa > 0), \end{aligned} \tag{40}$$

so ist für jedes $c_{46} < 2^{-[\varkappa+1]}\sqrt[\alpha]{c_{44}}$

$$A(x) = O(xe^{-c_{46}\sqrt[\alpha]{\log x}}). \tag{41}$$

Die Gültigkeit der Ungleichung (40) *mit gewissen c_{44}, c_{45} (und mit $\varkappa = 1$) ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Abschätzung* (41) *mit einem c_{46} gültig sei.*

7. Es sei die Funktion $a(s)$ in das Gebiet

$$\sigma > 1 - \frac{c_{47}}{\log^\beta \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)} \qquad (\beta > 0,\ c_{48} > 1) \tag{42}$$

---

[23]) G. MITTAG-LEFFLER, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, cinquième note, *Acta Mathematica*, 29 (1905), p. 101—181., insbesondere p. 143., Formel (74). Kürzlich hat Herr LIPKA einen neuen Beweis für die asymptotische Entwicklung der Funktion $E_\alpha(x)$ durch eine allgemeine Methode des Herrn HAAR veröffentlicht: ST. LIPKA, Über asymptotische Entwicklungen der MITTAG-LEFFLERschen Funktion $E_\alpha(x)$, *diese Acta*, 3 (1927), S. 211—223.

analytisch fortsetzbar und genüge dort einer Ungleichung

(43) $$|a(s)| \leqq c_{49} \log^{c_{50}} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|).$$

Dann gilt für $\sigma > 1$ nach der CAUCHYschen Abschätzungsformel

(44) $$|a^{(m)}(s)| \leqq \frac{c_{49}\, m!}{c_{47}^{m}} \log^{c_{50}+\beta m} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es ist, $m_0 = \left[\frac{1}{2\beta} + 1\right]$ gesetzt, für $m \geqq 2 m_0$,

$$\frac{m!\, \Gamma(\beta(m-m_0)+1)}{\Gamma((\beta+1)m+1)} \leqq \frac{m!\, \Gamma(\beta m + {}^1\!/_2)}{\Gamma((\beta+1)m+1)} \leqq$$

$$\leqq c_{51} \frac{m^{m+1/2} e^{-m} (\beta m - {}^1\!/_2)^{\beta m} e^{-\beta m + 1/2}}{((\beta+1)\, m)^{(\beta+1)m+1/2} e^{-(\beta+1)m}} \leqq$$

$$\leqq c_{51} \sqrt{e}\, \frac{m^{m+1/2} (\beta m)^{\beta m}}{((\beta+1)\, m)^{(\beta+1)m+1/2}} \leqq c_{52}(\beta)\, \gamma^{m},$$

wo der Kürze halber

$$\gamma = \frac{\beta^\beta}{(\beta+1)^{\beta+1}}$$

gesetzt wurde; daher ist wegen (44) für $\sigma > 1$

$$\left| E_{\beta+1}\left(-c_{53} \frac{d}{dx}\right) a(s) \right| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_{53}^{m}}{\Gamma((\beta+1)m+1)} a^{(m)}(s) \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{2m_0-1} \frac{c_{53}^{m}}{\Gamma((\beta+1)m+1)} \frac{c_{49}\, m!}{c_{47}^{m}} \log^{c_{50}+\beta m} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|) +$$

$$+ \sum_{m'=m_0}^{\infty} c_{49} c_{52}(\beta) \left(\frac{c_{53}}{c_{47}} \gamma\right)^{m_0+m'} \frac{\log^{c_{50}+\beta(m_0+m')} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)}{\Gamma(\beta m' + 1)} \leqq$$

$$\leqq c_{54}(\beta) \log^{c_{55}(\beta)} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|) +$$

$$+ c_{56}(\beta) \log^{c_{57}(\beta)} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)\, E_\beta\left(\frac{c_{53}}{c_{47}} \gamma \log^\beta \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)\right) \leqq$$

$$\leqq c_{58}(\beta) \log^{c_{59}(\beta)} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)\, e^{\sqrt[\beta]{\frac{c_{53}}{c_{47}}\gamma} \log \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)} \leqq$$

$$\leqq c_{60}(\beta, \varkappa) \{\operatorname{Max}(c_{48}, |t|)\}^{\varkappa} \leqq c_{61}(\beta, \varkappa)\, |s|^{\varkappa}$$

wenn nur $\varkappa^\beta > \frac{c_{53}}{c_{47}} \gamma = \frac{c_{53}}{c_{47}} \frac{\beta^\beta}{(\beta+1)^{\beta+1}}$ ist. Ich wähle nun

$$c_{53} < c_{47} \frac{(\beta+1)^{\beta+1}}{\beta^\beta},$$

damit $\varkappa < 1$ gewählt werden kann; der Satz V. liefert dann die Abschätzung

$$A(x) = O\left(xe^{-c_{62}\sqrt[\beta+1]{\log x}}\right)$$

für jedes $c_{62} < {}^1/_2 \sqrt[\beta+1]{c_{53}}$. Also gilt der

Satz VI.[24]) *Ist die Funktion $a(s)$ für*

$$\sigma > 1 - \frac{c_{47}}{\log^{\beta} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|)} \qquad (\beta > 0,\ c_{48} > 1)$$

regulär und erfüllt sie dort eine Ungleichung

$$|a(s)| \leqq c_{49} \cdot \log^{c_{50}} \operatorname{Max}(c_{48}, |t|),$$

so ist für jedes $c_{62} < \frac{\beta+1}{2} \sqrt[\beta+1]{\frac{c_{47}}{\beta^{\beta}}}$

$$A(x) = O\left(xe^{-c_{62}\sqrt[\beta+1]{\log x}}\right). \tag{45}$$

8. Analog ergibt sich im Speziellfalle

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{63}^m \log 3 \log 4 \ldots \log(m+2)}{m!^2} x^m$$

der folgende

Satz VII. *Genügt die Funktion $a(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ der Ungleichung*

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_{63}^m \log 3 \log 4 \ldots \log(m+2)}{m!^2} a^{(m)}(s)\right| \leqq c_{64} |s|^{\varkappa} \tag{46}$$

$$(0 < \varkappa < 1),$$

oder aber ist dieselbe im Gebiete

$$\sigma \geqq 1 - c_{65} \frac{\log\log \operatorname{Max}(c_{66}, |t|)}{\log \operatorname{Max}(c_{66}, |t|)} \qquad (c_{66} > e)$$

regulär und erfüllt sie dortselbst eine Ungleichung

$$|a(s)| \leqq c_{67} \log^{c_{68}} \operatorname{Max}(c_{66}, |t|), \tag{47}$$

so ist für jedes $c_{69} < \sqrt{{}^1/_2\, c_{63}}$ *bzw.* $c_{69} < \sqrt{{}^1/_2\, c_{65}}$

$$A(x) = O\left(xe^{-c_{69}\sqrt{\log x \log\log x}}\right).$$

Man soll, um diesen Satz zu beweisen, die sich durch ganz grobe Abschätzung (Maximalglied statt Summe der Potenzreihe) sich ergebende Ungleichung

$$P(x) \geqq c_{70}(\varepsilon)\, e^{\sqrt{(2+\varepsilon) x \log x}}$$

(für jedes $\varepsilon > 0$ und $x \geqq 1$)

---

[24]) Vgl. E. Landau, *Handbuch* usw. a. a. O. [6]), § 242.; S. 877—879. (II. Band.)

und, beim Nachweise, dass aus der Regularitätsforderungen und aus der Ungleichung (47) die Ungleichung (46) folgt, die ebenfalls leicht beweisbare Abschätzung

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\log 3 \log 4 \ldots \log (m+2)}{m!} x^m\right| \leqq c_{71} x^2 e^{\nu}$$

$$\text{für } \nu \geqq 1 \text{ ganz, } \frac{\nu}{\log(\nu+2)} \leqq x < \frac{\nu+1}{\log(\nu+3)}$$

anwenden.

9. Satz VI. und VII. haben unmittelbare Anwendungen auf die Primzahltheorie. Wie zuerst Herr DE LA VALLÈE POUSSIN,[25]) später aber viel einfacher Herr LANDAU[26]) bewiesen hat, ist die Funktion

$$(48) \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)-1}{n^s} = -\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right),$$

wo $\Lambda(n)$ die zahlentheoretische Funktion

$$\Lambda(n) = \log p \text{ für } n = p^k,\ p \text{ Primzahl, } k \geqq 1,$$
$$\Lambda(n) = 0 \text{ sonst}^{27})$$

bezeichnet, in einem Gebiet

$$\sigma > 1 - \frac{c_{72}}{\log \operatorname{Max}(c_{73}, |t|)} \qquad (c_{73} > 1)$$

regulär und genügt dortselbst einer Ungleichung

$$(49) \qquad |f(s)| \leqq c_{74} \log^{c_{75}} \operatorname{Max}(c_{73}, |t|).$$

Daher folgt aus dem Satze VI. die von Herrn DE LA VALLÈE POUSSIN durch Anwendung tiefer Eigenschaften der Zetafunktion, später von Herrn LANDAU ohne diese Hilfsmittel, aber mit Hilfe des CAUCHYschen Integralsatzes hergeleitete Abschätzung

$$\psi(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) = x + O(x e^{-c_{76}\sqrt{\log x}})$$

für jedes $c_{76} \leqq \sqrt{c_{72}}$, und daher der Primzahlsatz in der schärferen Fassung

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-c_{76}\sqrt{\log x}})$$

ebenfalls für jedes $c_{76} < \sqrt{c_{72}}$.

---

[25]) A. a. O. [4]).

[26]) A. a. O. [13]).

[27]) Also für $n = 1$ und für jedes $n > 1$, welches durch zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist.

Aus dem tieferen Hardy-Littlewoodschen Satze,[28]) nach welchem $f(s)$ sogar in einem Gebiet

$$\sigma \geqq 1 - c_{77} \frac{\log\log \operatorname{Max}(c_{78}, |t|)}{\log \operatorname{Max}(c_{78}, |t|)} \qquad (c_{78} > e)$$

regulär ist und einer Ungleichung von der Form (49) genügt, folgt ebenso nach dem Satze VII. die Littlewoodsche, zurzeit schärfeste Abschätzung der Primzahlmenge:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-c_{79}\sqrt{\log x \log\log x}}\right)$$

für jedes $c_{79} < \sqrt{{}^1\!/_2 c_{77}}$.

10. Der Umstand, dass Satz I. eine elementare Methode für den Übergang von den Eigenschaften der Funktion $a(s)$ zur Abschätzung der Koeffizientensumme $A(x)$ liefert, ermöglicht einen den Begriff der analytischen Funktion vermeidenden, also in einem gewissen Sinne elementaren Beweis der weniger scharfen Restabschätzung[29])

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-\sqrt[14]{\log x}}\right). \tag{50}$$

Der obige Beweis des Satzes VI. in der Formulierung, dass aus den Ungleichungen (44) die Abschätzung (45) folgt, lässt sich nämlich leicht in einen in diesem Sinne elementaren Beweis umformen. Denn der Begriff der Differentiation nach einer komplexen Variabeln tritt in den Vorangehenden nur scheinbar auf: ist

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine für $\sigma > 1$ konvergente Dirichletsche Reiche, so kann man für $m = 1, 2, \ldots$ die Funktion $a^{(m)}(s)$ ganz formal durch die bekanntlich ebenfalls für $\sigma > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe

$$a^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n \log^m n}{n^s} \tag{51}$$

erklären. Die Formel (12) kann man zur Vermeidung der komplexen Integration natürlich auch in der Form

$$\sum_{n \leqq x} b_n \log^K \frac{x}{n} = \frac{K!}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{1+\eta+ti}}{(1+\eta+ti)^{K+1}}\, b(1+\eta+ti)\, dt$$

---

[28]) A. o. O. [14]); siehe auch E. Landau, a. a. O. [13]).

[29]) Vgl. Fussnote [9]).

schreiben; dieselbe ist im hier in Betracht kommenden Falle $\varkappa < 1$, $K = 1$ bei LANDAU, Sobre los usw., a. a. O. [16]), Teorema 71 elementar bewiesen. Die asymptotische Formel (39) folgt für den Fall, dass α ganz ist, mit welchem man im Beweise von (49) auskommt, unmittelbar aus der Identität

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(e^x + e^{\varrho x} + e^{\varrho^2 x} + \ldots + e^{\varrho^{\alpha-1} x}\right).$$

$$\left(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}\right).$$

Ferner, und das ist die Hauptsache, man kann elementar beweisen, das die Funktion (48) für $\sigma > 1$ die Ungleichungen

$$(52)\qquad |f^{(m)}(s)| \leqq c_{80}^{m+1}\, m!\, \log^{12(m+1)} \operatorname{Max}(3, |t|) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt; daraus folgt dann nach dem Satze V., ebenso, wie in **7.**, die Abschätzung

$$\psi(x) = x + O\left(x e^{-c_{81}\sqrt[13]{\log x}}\right),$$

woraus sich (50) durch partielle Summation und ganz grobe Abschätzung ergibt.

Diesen elementaren Beweis der Ungleichungen werde ich hier kurz skizzieren. Man bedient sich zu diesem Zwecke der für $\sigma > 1$ sich durch die Anwendung der ersten Stufe der EULERschen Summenformel ergebenden Darstellung

$$(53)\qquad \begin{aligned}(-1)^m \zeta^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^m n}{n^s} + \frac{m!}{\omega^{s-1}} \sum_{k=0}^{m} \frac{\log^k \omega}{k!} \frac{1}{(s-1)^{m-k+1}} + \\ + \int_\omega^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} (m \log^{m-1} u - s \log^m u)\, du\end{aligned}$$

$$(\omega > 0,\ \text{ganz}).$$

Dieselbe liefert mit $\omega = 1$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$ und[30]) $|s-1| \leqq {}^1/_2$

$$(54)\qquad \left|\zeta^{(m)}(s) - \frac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}}\right| \leqq c_{82}\, m!,$$

also

$$(55)\qquad |m\,\zeta^{(m-1)}(s) + (s-1)\,\zeta^{(m)}(s)| \leqq c_{83}\, m!$$

und

$$(56)\qquad |(s-1)\,\zeta(s)| \geqq c_{84};$$

[30]) Natürlich ist stillschweigend immer auch $\sigma > 1$ vorausgesetzt.

ferner folgt aus (53) mit $\omega = \mathrm{Max}(3, [|t|])$ für[31]) $|s-1| > 1/2$

(57) $$|\zeta^{(m)}(s)| \leqq c_{85}^{m+1} m! \log^{m+1} \mathrm{Max}(3, |t|),$$

und, ebenso, wie bei LANDAU, Sobre los usw., a. a. O. [16]), Teorema 77.,

(58) $$|\zeta(s)| \geqq \frac{c_{86}}{\log^{10} \mathrm{Max}(3, |t|)}$$

wobei man die Tatsache ausnützt, (vgl. Teorema 65.), dass für $1 < \sigma_1 < \sigma_2$

$$\zeta(\sigma_2 + ti) - \zeta(\sigma_1 + ti) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \zeta'(\sigma + ti)\, d\sigma$$

ist (gliedweise Integration der gleichmässig Konvergenten DIRICHLETschen Reihe von $\zeta'(s)$).

Ferner beweist man die Identität

$$\zeta(s)\varphi(s) + \zeta'(s) = 0,$$

wobei

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = f(s) + \zeta(s)$$

ist, wie Herr LANDAU in Sobre los usw., a. a. O. [16]), Teorema 51. Daraus folgt, da sich die formalen Differentiationsregeln für Summe und Produkt[32]) von DIRICHLETschen Reihen aus der Erklärung (51) unmittelbar ergeben, die Identität

(59) $$\varphi^{(m)}(s)\zeta(s) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \varphi^{(m-k)}(s)\zeta^{(k)}(s) + \zeta^{(m+1)}(s) = 0,$$

---

[31]) Es genügt nämlich allein den Fall $1 < \sigma < 2$ zu betrachten; für $\sigma \geqq 2$ folgt wegen

$$|\zeta^{(m)}(s)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^m n}{n^2} = |\zeta^{(m)}(2)|$$

aus (53) mit $\omega = 1$ (57) und noch schärferes.

[32]) Es handelt sich durchweg um für $\sigma > 1$ absolut konvergente DIRICHLETschen Reihen; sind

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

solche, so ist es auch ihr Produkt

$$a(s)\,b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

wobei

$$c_k = \sum_{n n' = k} a_n b_{n'}$$

ist.

die man durch eine leichte Umformung auch in der Form

$$(60)\quad \begin{cases} \left(\varphi^{(m)}(s) - \dfrac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}}\right)(s-1)\zeta(s) + \\ + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \left(\varphi^{(m-k)}(s) - \dfrac{(-1)^{m-k}(m-k)!}{(s-1)^{m-k+1}}\right)(k\zeta^{(k-1)}(s) + (s-1)\zeta^{(k)}(s)) + \\ \qquad + ((m+1)\zeta^{(m)}(s) + (s-1)\zeta^{(m+1)}(s)) = 0 \end{cases}$$

schreiben kann. Aus (55), (56) und (60) folgt durch vollständige Induktion für $|s-1| \leqq 1/2$

$$\left|\varphi^{(m)}(s) - \frac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}}\right| \leqq c_{87}^{m+1} m!,$$

also wegen (54)

$$(61)\qquad |f^{(m)}(s)| \leqq c_{88}^{m+1} m!;$$

aus (57), (58) und (59) ebenso für $|s-1| > 1/2$

$$|\varphi^{(m)}(s)| \leqq c_{89}^{m+1} m! \log^{12(m+1)} \operatorname{Max}(3, |t|),$$

also wegen (57)

$$|f^{(m)}(s)| \leqq c_{90}^{m+1} m! \log^{12(m+1)} \operatorname{Max}(3, |t|)$$

für $|s-1| > 1/2$, aber, wegen (61), bei geeignetem c_{90} auch für $|s-1| \leqq 1/2$.

(*Eingegangen am 19. März 1929.*)