Sur la convergence en moyenne.

(Seconde communication.)

Par FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

Dans une Note récente du même titre,[1]) j'ai démontré le théorème suivant: *Lorsque les fonctions $f_n(x)$ définies sur l'ensemble mesurable E et sommables ainsi que la p-ième puissance de leur module, convergent faiblement d'ordre p vers la fonction $f(x)$ et que, de plus,*

$$(1) \qquad \int_E |f_n|^p dx \to \int_E |f|^p dx,$$

alors la suite $\{f_n\}$ converge aussi en moyenne d'ordre p vers la même fonction f.[2])

Si je reviens aujourdhui sur ce sujet, c'est en premier lieu pour reconnaître la priorité de M. RADON qui a établi le même théorème, pour des fonctions $f(x)$ et $f_n(x)$ réelles, dans son important Mémoire de 1913 sur les fonctions additives d'ensembles;[3])

---

[1]) pp. 58—64 du présent volume.

[2]) La convergence *faible* d'ordre p des f_n vers f indique la relation

$$\int_E (f_n - f) g\, dx \to 0$$

pour toute fonction $g(x)$ sommable ainsi que $|g|^{p/p-1}$; la convergence *en moyenne* d'ordre p est définie par la relation

$$\int_E |f_n - f|^p dx \to 0.$$

[3]) J. RADON, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *Sitzungsberichte Akad. Wiss., Wien,* **122** (1913), Abt. II a. pp. 1295—1438; cf. en particulier p. 1363. Il convient d'observer que les intégrales considérées par M. RADON appartiennent à un type plus général que celles de notre énoncé; ce sont des intégrales formées par rapport à une distribution de masses positives dans un espace d'un nombre quelconque de

malgré l'intérêt particulier que j'attachais à ce Mémoire dont le sujet était intimément lié à mes recherches antérieures, le théorème actuel parait avoir échappé à mon attention. Mais je profite aussi de l'occasion pour en donner une démonstration nouvelle, entièrement differente de celle que je viens de publier et aussi de celle de M. Radon, bien qu'elle me fusse suggérée par la lecture de cette dernière. Le seul point en commun avec M. Radon est ce que je pars des mêmes inégalités élémentaires dont M. Radon savait tirer parti pour établir le théorème par une analyse délicate;[4]) ce que je vais montrer c'est que le théorème est une conséquence presque immédiate de ces inégalités.

Supposons d'abord $p \geqq 2$; alors on a, pour toute valeur réelle de z,

$$|1+z|^p \geqq 1+pz+A|z|^p, \tag{2}$$

où A est une certaine constante positive indépendante de z. En effet, envisageons le rapport

$$\frac{|1+z|^p-1-pz}{|z|^p}; \tag{3}$$

le dérivée seconde de l'expression figurant au numérateur, égale à $p(p-1)\,|1+z|^{p-2}$, est positive, ne s'annulant que pour $z=-1$; comme de plus, cette expression elle-même s'annule pour $z=0$ avec sa dérivée première, elle sera essentiellement positive pour $z \neq 0$. Pour $z=0$, le rapport (3) devient infini ou égal à 1 suivant que $p>2$ ou $p=2$; donc notre rapport sera essentiellement positif pour toute valeur finie de z; comme enfin, pour $|z|=\infty$, il tend vers une limite égale à 1, il s'ensuit qu'il admettra une valeur minimum A essentiellement positive, c. qu. f. d.

Dans l'inégalité que nous venons d'établir, remplaçons z par $\dfrac{f_n(x)-f(x)}{f(x)}$; en multipliant de plus par $|f|^p$ et en intégrant, il vient que

$$\int_E |f_n|^p dx \geqq \int_E |f|^p dx + p\int_E |f|^{p-2} f(f_n-f)\,dx + A\int_E |f_n-f|^p dx$$

dimensions. Le lecteur se rendra aisement compte du fait que la méthode exposée dans la présente communication ainsi que celle de ma première Note sur ce sujet, s'appliquent immédiatemant non seulement au cas des intégrales généralisées de M. Radon, mais aussi à toute opération linéaire positive portant sur des fonctions définies dans des ensembles abstraits.

[4]) l. c, p. 1358 et suiv.

et comme, par l'hypothèse de la convergence faible, la seconde des intégrales qui figurent au second membre tend vers 0 avec $1/n$ tandis que, par l'hypothèse (1), la première de ces intégrales est la limite de celle au premier membre, il s'ensuit que

$$\int_E |f_n - f|^p \, dx \to 0, \tag{4}$$

c'est à dire le théorème qu'il fallait démontrer.

Lorsque $1 < p < 2$, considérons, au lieu du rapport (3), la fonction donnée par cette même expression pour $|z| \geqq 1$ et par

$$\frac{|1+z|^p - 1 - pz}{z^2}$$

pour $|z| \leqq 1$. Pour $z = 0$, cette fonction a pour limite $\frac{1}{2} p(p-1)$ et comme elle est, tout comme au premier cas, essentiellement positive pour toute autre valeur finie ou infinie de z, elle admettra une valeur minimum $B > 0$. De là, en raisonnant tout comme au premier cas, on n'obtiendra pas immédiatement la relation (4) qu'il s'agit à démontrer, mais seulement la relation suivante:

$$\int_{E_n} |f_n - f|^p \, dx + \int_{E - E_n} (f_n - f)^2 |f|^{p-2} \, dx \to 0,$$

où nous avons désigné par E_n l'ensemble des valeurs x telles que $|f_n(x) - f(x)| \geqq |f(x)|$. Donc l'une et l'autre de ces deux intégrales tendent vers zéro. Pour en déduire la relation (4), il nous faudra montrer que la relation

$$\int_{E - E_n} (f_n - f)^2 |f|^{p-2} \, dx \to 0$$

entraine la relation

$$\int_{E - E_n} |f_n - f|^p \, dx \to 0.$$

Pour cela, nous n'aurons qu'à appliquer l'inégalité de Schwarz en tenant compte encore de l'inégalité $|f_n(x) - f(x)| < |f(x)|$ valable par hypothèse pour x appartenant à l'ensemble $E - E_n$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{E - E_n} |f_n - f|^p \, dx &\leqq \int_{E - E_n} |f|^{p-1} |f_n - f| \, dx \leqq \\ &\leqq \left[\int_{E - E_n} |f|^p \, dx \right]^{1/2} \left[\int_{E - E_n} (f_n - f)^2 |f|^{p-2} dx \right]^{1/2} \leqq \\ &\leqq \left[\int_E |f|^p \, dx \right]^{1/2} \left[\int_{E - E_n} (f_n - f)^2 |f|^{p-2} dx \right]^{1/2} \to 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le théorème est démontré aussi pour le cas où $p < 2$.

La démonstration que je viens d'esquisser ainsi que celle de M. RADON peuvent être aisement adaptées au cas plus général, envisagé dans ma première communication, où les fonctions $f(x)$ et $f_n(x)$ ne sont plus supposées de prendre exclusivement des valeurs réelles. Pour cet effet, on n'aura qu'à observer que le rapport

$$\frac{|1+z|^p-1-p\Re(z)}{|z|^2} \tag{5}$$

(où $\Re(z)$ indique la partie réelle de z), positif pour $z\neq 0$, admet, pour $|z|\to 0$, une limite inférieure essentiellement positife, savoir $^1/_2 p$ lorsque $p\geqq 2$ et $^1/_2 p(p-1)$ lorsque $1<p\leqq 2$. Il s'ensuit que, pour $p\geqq 2$, le rapport

$$\frac{|1+z|^p-1-p\Re(z)}{|z|^p} \tag{6}$$

et, pour $1<p<2$, la fonction définie par (6) pour $|z|\geqq 1$ et par (5) pour $|z|\leqq 1$ admettent des minima essentiellement positifs. En remplaçant, dans les inégalités qui en ressortent, la variable z par $\dfrac{f_n(x)-f(x)}{f(x)}$, le raisonnement s'achèvera tout comme dans le cas réel.

(*Reçu le 20 avril 1929.*)