Remarques sur la Note de M. O. D. Kellogg intitulée „Some notes on the notion of capacity in potential theory". [1])

Par Florin Vasilesco à Cambridge, Mass.

Je voudrais montrer par quelques remarques rapides quel est, à mon avis, le principal intérêt des importants résultats exposés par M. Kellogg dans la Note citée, et quelle est la place de ces resultats dans la théorie des points réguliers et irréguliers de la frontière des domaines les plus généraux.

On sait que c'est de la validité ou de la non-validité du théorème B) de la Note de M. Kellogg que dépend le sort de beaucoup et des plus beaux résultats qui ont été énoncés dans cette théorie. Je renvoie, pour le voir, à mon mémoire „Sur les singularités des fonctions harmoniques" qui va paraître dans le *Journal des Mathématiques.*

D'autre part, le théorème A) que donne M. Kellogg et dont il démontre l'équivalence avec le théorème B) à l'aide de son beau théorème I, — dans l'énoncé duquel il faut cependant spécifier que „si T est infini, V doit avoir à l'infini une valeur inférieure à M," et de même, dans l'énoncé de A) que „les fonctions considérées sont nulles à l'infini si T est infini"[2]) — outre la contribution

---

[1]) *Voir ces Acta,* tome 4 (1928), p. 1—5.

[2]) Cela est nécessaire, en effet, pour conclure dans le cas du domaine infini, par les mots „Hence it is nowhere negative", l. c., page 3. On le voit d'ailleurs par un exemple: soit $\nu(P)$ le potentiel de l'épine de M. Lebesgue, qui est un ensemble ayant un seul point irregulier. Prenons $V = -\nu(P)$; au point irrégulier de l'épine qui est sa pointe, $\nu(P)$ a une limite inférieure plus petite que 1, soit λ, et aux autres points de l'épine, tend vers 1. La fonction $V = -\nu(P)$ a donc sur l'épine la limite supérieure $M = -\lambda$, et l'ensemble e des points de l'épine où $\limsup V > M - \alpha$, pour $0 < \alpha < 1 - \lambda$ est constitué d'un seul point, donc est de *capicité nulle.*

L'adjonction dans l'énoncé du théorème A) est motivée par ce que la démonstration de son équivalence avec B) repose sur le théorème I.

possible qu'il apporte à la discussion de B), ramène, par contre, la question de *l'unicité des fonctions harmoniques* que M. Kellogg s'était posée depuis longtemps déjà, à la démonstration du théorème B).

Enfin, le théorème II, que donne M. Kellogg, résout complètement la question des „removable singularities", singularités artificielles dirions-nous.

Ce sont là, des résultats relatifs à des fonctions harmoniques *quelconques,* et *non plus seulement à celles qui sont solutions du probléme de* Dirichlet *généralisé,* que M. Kellogg obtient par l'emploi d'une fonction harmonique très particulière, *le potentiel,* qui est, je le rappelle, la solution du probléme de Dirichlet généralisé pour un domaine infini et des valeurs constantes égales à 1 sur sa frontière.

C'est là, à mon avis, la grande portée des résultats de M. Kellogg.

Dans mon mémoire cité, (*voir* § 26 et suivants) j'ai fait ressortir comment, pour l'étude à la frontière des fonctions harmoniques, solutions du problème de Dirichlet généralisé, la *considération du potentiel seul suffit* et *simplifie* en même temps l'étude. De beaux énoncés donnés par M. G. Bouligand de diverses manières[3]) ont pu être rattachés ainsi à la considération du seul potentiel, et leur validité ne dépend que de celle du théorème B).

J'ajoute que M. Kellogg a, dans une Note récente parue aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,*[4]) démontré la validité du théorème B) pour le cas de l'espace à deux dimensions. De difficultés sérieuses s'opposent à la recherche de la validité de ce théorème dans les espaces à trois ou plus de dimensions. Ceci n'est plus surprenant maintenant, lorsqu'on a vu par les travaux de M. Kellogg et les miens, que ce théorème polarise autour de son existence incertaine pour les espaces à plus de deux dimensions, tant de résultats aléatoires sur les fonctions harmoniques.

Nous sommes ici, avec ce théorème, au coeur même de l'étude des fonctions harmoniques à la frontière de leur domaine d'existence.

(Reçu le 13 novembre 1928.)

---

[3]) *voir Annales de la Soc. Polonaise de Math.,* 3 (1925), p. 93. et autres.
[4]) séance du 24 Septembre 1928, p. 526.