# Bibliographie.

**P. Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker** (Wissenschaft und Hypothese XXVIII), deutsch von H. Pollaczek-Geiringer, 253 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Das in deutscher Übersetzung vorliegende Werk des bekannten französischen Mathematikers wird ohne Zweifel für die Fachgenossen in verschiedener Hinsicht eine fesselnde Lektüre sein. In historischer Hinsicht ist es in vorzüglicher Weise geeignet insbesondere in den Geist der hellenistischen Mathematik einen Einblick zu gewähren; andererseits wird die Auffassung des Verfassers über Ziel und Methode der modernen Mathematik vom Interesse sein. Freilich ist diese Auffassung recht diskutabel; ob in der Tat das „Ziel ... ein widerstrebendes Objekt zu erfassen und zu zwingen" ist (S. 190). Ebenso wird die Sentenz: „daher wird man nicht danach streben ein schönes Werk zu gestalten" bei manchen Mathematikern Anstoss erregen. Die Verschiedenheit der Auffassung kann die Wertschätzung natürlich nicht beeinflussen; es handelt sich ja um ein Werk, das in erster Reihe anregend sein will, und dieses Ziel erreicht es in vollem Maasse.

A. H.

**E. Hellinger und O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten** (Sonderausgabe aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften), 282 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928.

Abgesehen von mehr oder weniger wichtigen Einzelresultaten, die die Tragweite der heranreifenden Methoden noch nicht zu überblicken gestatteten, datiert die Theorie der Integralgleichungen und verwandter Probleme vom Anfang dieses Jahrhunderts; nach einem kolossalen Aufschwunge, nach Umwälzung und Umwertung mancher klassischen Teile der Analysis, zum Gemeingute geworden, ist sie schon vor mehr als einem Dezennium im Grossen und Ganzen zu einem gewissen Abschlusse gelangt; die reinen Mathematiker haben ihren Platz den angewandten abgetreten. Es hat längst die Stunde geschlagen, um nach rückwärts zu blicken, zu vergleichen und zu ordnen. Wir alle, die diese stürmische Entwicklung miterlebt haben, warteten mit Ungeduld auf eine durchgreifende Darstellung und speziell auf das seit langem angekündigte Referat, das jetzt nun vorliegt.

Das Buch entschädigt uns reichlich für die lange Wartezeit. Die beiden Verfasser, die selbst jene stürmische Zeit als tätige Forscher mitgemacht und besonders im Gebiete der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen Fundamentales geleistet hatten, haben nun auch die ganze Literatur gemeinsam durchgearbeitet, Resultate und Methoden verglichen, Zusammenhänge entdeckt, Fehlendes nachgeholt. Das Resultat dieser mühsamen Arbeit gliedern sie, nachdem sie das Bild der historischen Entwicklung in einem besonderen Kapitel entwerfen, dem algebraischen Gesichtspunkte entsprechend, in zwei Kapitel: Auflösungstheorie, Eigenwerttheorie. Innerhalb der Kapitel ist der Stoff derart angeordnet, dass der methodische Zusammenhang der beiden grossen, gewöhnlich getrennt behandelten Theorien, nämlich der Integralgleichungen und der Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, der sich keineswegs auf eine durch ein orthogonales Funktionensystem vermittelte Korrespondenz beschränkt, sich auch dem unbewandten Leser aufdränge. Vielleicht würde dieser Zusammenhang noch klarer einleuchten, wenn die umfassenden Begriffe der Funktionalanalysis, anstatt zuerst um die Mitte des Buches herum aufzutreten, vorausgeschickt worden wären und der Begriff der Funktionaltransformation etwas allgemeiner formuliert würde, so dass er auch die Substitutionen mit unendlich vielen Veränderlichen und auch Korrespondenzen zwischen heterogenen Dingen, wie Funktion und ihre FOURIERkoeffizienten, umfasse.

Es ist zu bedauern, dass, wahrscheinlich aus redaktionellen Gründen, die methodische Auswirkung auf die Nachbargebiete nur in einigen Zeilen angedeutet wird; einer der schönsten Belege dieser Auswirkung, der WEYLsche Beweis des Fundamentalsatzes über fastperiodische Funktionen, scheint schon nach Toresschluss gekommen zu sein. Doch sollen diese subjektiven Bemerkungen die Hochschätzung, die ich dem für Lernende und Forscher von nun an unentbehrlichen Werke entgegenbringe, keineswegs beeinträchtigen.

F. R.

**Maurice Lecat, Coup d'oeil sur la Théorie des déterminants supérieurs dans son état actuel,** avec une préface de M. A. BUHL, 98 + [100] pages, Bruxelles, Maurice Lamertin, 1927.

Les déterminants supérieurs dont l'idée date de CAYLEY et de SYLVESTER, sont des sommes algébriques formées des produits des éléments de matrices à plusieurs dimensions d'une manière analogue comme pour les déterminants ordinaires. La difficulté principale qu'il faut surmonter c'est la détermination des signes, pour lesquels il n'existe pas de convention immédiate comme dans le cas de deux dimensions, de sorte qu'il faudra envisager à la fois plusieurs conventions également autorisées, les déterminants qui en ressortent obéissant à des règles de calcul analogues à celles qu'on applique aux déterminants ordinaires.

M. LECAT prépare un traité en trois volumes embrassant tous les détails et les nombreuses applications de cette théorie qu'il a enrichié lui même; en attendant il en donne un aperçu sommaire dans le présent livre qui sera suivi d'un autre Coup d'oeil sur les applications à l'Algèbre et à la Géométrie.

L. Kalmár.

**F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie,** für den Druck neu bearbeitet von W. ROSEMANN (Grundlehren der math. Wissenschaften XXVI), XII + 326 S., Berlin, J. Springer, 1928.

Das Buch, eines der schönsten Schöpfungen KLEINS, ist der Weiterbildung der CAYLEYschen Untersuchungen gewidmet. Der KLEINsche projekivische Aufbau der nichteuklidischen Geometrie ist zweimal in autographierten Vorlesungsheften erschienen. Das vorliegende Buch entstand aus diesen teils durch Weglassung, teils durch Ergänzung zahlreicher Stellen. Der erste Teil enthält eine Einführung in die projektive Geometrie. Die Grundbegriffe der projektiven Geometrie, die Gebilde zweiten Grades, die Kollineationen die eine Gebilde zweiten Grades in sich überführen, werden hier recht ausführlich behandelt. Die eigentlichen, zum Gegenstand gehörenden Betrachtungen beginnen mit der Einordnung der euklidischen Metrik in das projektive System. Durch Übertragung der Begriffe *Entfernung* und *Winkel* auf das Imaginäre entstehen die wichtigen Begriffe der fundamentalen Gebilde: die imaginären Kreispunkte und der imaginäre Kugelkreis. Der sonst leicht irreführende Begriff der unendlich fernen Kreispunkte wird in einleuchtender Weise interpretiert. Mit Hilfe der Darstellung des euklidischen Winkels durch ein Doppelverhältnis wird es ermöglicht, durch eine Verallgemeinerung dieser Formeln den metrischen Begriffen der euklidischen Geometrie entsprechende Begriffe der nichteuklidischen Geometrie einzuführen. Zuerst wird die elliptische Geometrie als eine nichteuklidische Geometrie aus der euklidischen Geometrie des Raumes abgeleitet. Nach Einführung der allgemeinen projektiven Koordinaten werden die verschiedenen Massbestimmungen behandelt. Von diesen Massbestimmungen werden die elliptische, parabolische und hyperbolische ausgewählt, da nur diese in der Aussenwelt anwendbar sind, Dann folgt eine eingehende Untersuchung der beiden nichteuklidischen Geometrien. Dem Problem der Raumformen wird ein ganzes Kapitel gewidmet. Die axiomatische Begründung der hyperbolischen Geometrie und die differentialgeometrischen Gesichtspunkte werden nur in wenigen Seiten behandelt. In dem Schlusskapitel wird der Zusammenhang der nichteuklidischen Geometrie mit anderen Gebieten der Mathematik (Automorphe Funktionen. Uniformisierung, Relativitätstheorie) erörtert.

Den abstrakten logischen Untersuchungen gegenüber wird in dem Buch auf die anschauliche Seite der Geometrie ein ganz besonderer Wert gelegt, denn nach CLEBSCH „ist die Freude an der Gestalt in einem höheren Sinne, die den Geometer ausmacht". Der stufenweise Aufbau des Stoffes, welcher nur langsam vom Elementaren zum Höheren steigt, macht das Buch zu einer leichtverständlichen und genussreichen Lektüre.

St. Lipka.

## D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik (Grundlehren der math. Wissenschaften XXVII), VIII + 120 S., Berlin, J. Springer, 1928.

Es ist häufig bemerkt worden, dass in unserer Zeit das Interesse für die *theoretische* (*mathematische*) *Logik* in mathematischen Kreisen eine immer mehr und mehr zunehmende Tendenz zeigt; besonders fördernd wirkte in dieser Hinsicht der Einfluss der radikal-intuizionistischen Kritik BROUWER's und die demgegenüberliegende HILBERTsche Neubegründung der Mathematik.

Die intuizionistische Kritik hat in der Forderung der Konstruierbarkeit aller Objekte, deren Existenz man behauptet, ein neues Kriterium für die

Wahrheit irgendeiner mathematischen Aussage angegeben, in Anbetracht dessen zweifellos das ganze Material der heutigen Mathematik zu prüfen ist, analog, wie nach CAUCHY's Kritik der Reihenlehre die unendliche Reihen auf Konvergenz zu prüfen waren. Bekanntlich gibt es gar manche wertvolle Gebiete der Mathematik, die diese schwere Probe nicht aushalten oder wenigstens scheint die intuizionistische Begründung derselben zunächst aussichtslos.

Vergleicht man aber die intuizionistische Kritik mit der Kritik der Reihenlehre, so entspricht der Summabilitätstheorie, auf Grund deren verschiedene Behauptungen von LEIBNIZ, EULER u. A. über divergente Reihen in einem wohldefinierten Sinne sich dennoch als richtig herausgestellt haben, die HILBERTsche Beweistheorie. Diese, in den letzten 7 Jahren von HILBERT entwickelte und von seinen Schülern — darunter W. ACKERMANN — weitergeführte Theorie hat das Ziel, die klassische Mathematik von der vernichtenden Absicht der intuizionistischen Kritik zu retten. Dies geschieht dadurch, dass man zeigt, dass die ganze Mathematik auch bei Berücksichtigung der intuizionistischen Ansichten in einem wohldefinierten — wenn auch von der Bedeutung, die der Mathematik durch den Intuizionismus beigelegt wird, abweichenden — Sinne bestehen bleibt.

Eine übliche, dem axiomatischen Standpunkt entsprechende Auffassung der Mathematik ist die, dass eine Behauptung innerhalb einer, durch Axiome genau umschriebenen Theorie richtig ist, wenn dieselbe eine logische Folge der Axiomen ist. Mittels der theoretischen Logik kann diese Auffassung zu einer exakten — auch intuizionistisch betrachtet korrekten — Definition eines bestimmten Begriffes verschärft werden, welcher in der Beweistheorie als Wahrheitsbegriff zugrunde gelegt wird. Dass dieser Begriff von dem entsprechenden intuizionistischen Begriff verschieden ist, ist nicht vom Belang: die Hauptsache ist, dass derselbe, um die Analogie mit der Summabilitätstheorie weiterzuführen, durch die Epsilontik des Intuizionismus (d. h. ohne Gleichnis ausgedrückt: *finit*) definiert wurde. Natürlich ist es eine grosse Aufgabe der Beweistheorie, für jede einzelne betrachtete „Summationsmethode", d. h. für jedes einzelne betrachtete Axiomensystem zu prüfen, dass die wichtigsten Eigenschaften der „Konvergenz", d. h. der Wahrheit, auch bei dem neuen Begriffe erfüllt sind. Es handelt sich in erster Linie darum, dass von zwei einander widersprechenden Aussagen nicht beide wahr sein können, d. h. um die *Widerspruchslosigkeit* der zugrunde gelegten Axiomensystemen; ohne dieselbe steht nicht einmal fest, dass nicht etwa eine jede Behauptung als wahr erklärt wird.

Intuizionistische Forschung und Beweistheorie sind daher nicht Schöpfungen entgegengesetzter Weltanschauungen: sie ergänzen sich vielmehr. Beweisbarkeit und Nichtbeweisbarkeit eines Satzes stellen intuizionistische Wahrheiten dar; und umgekehrt, es wird die Bedeutung einer Konstruktion für ein Objekt, für welches bisher nur ein formaler Existenzbeweis vorhanden war, von niemandem abgesprochen. Die Beweistheorie benutzt die intuizionistische Arithmetik, gibt aber dafür „Sätze vom TAUBER—HARDYschen Typus" in grosser Anzahl, d. h. Sätze, durch welche in sehr allgemeinen Fällen aus der formalen Beweisbarkeit einer mathematischen Aussage ihre intuizionistische Richtigkeit gefolgert werden kann. Es kann sogar der Fall sein, dass bei einem gewissen Axiomensystem der Wahrheitsbegriff der Beweistheorie sich mit dem Wahrheitsbegriffe des Intuizionismus deckt. Die Frage, ob das bei einem gegebenen Axiomensystem der Fall ist, hängt eng mit der Möglichkeit eines *Entscheidungsverfahrens* zusammen, durch welche man jeden gegebenen Satz in diesem Axiomensystem entweder beweisen, oder widerlegen kann. HILBERT hat schon längst die von vielen angenommene, aber auch von vielen umschrittene Vermutung aufgestellt, dass es in der Mathematik kein Ignorabimus gibt. Auch dieses Problem lässt sich durch die HILBERTsche Beweistheorie exakt formulieren und angreifen.

Die Darstellung der Ergebnisse der Beweistheorie ist einem besonderen Werke von HILBERT und BERNAYS vorbehalten; das vorliegende Buch dient in erster Linie zur Vorbereitung dieses Werkes. Fragen, die sich auf ein spezielles mathematisches Axiomensystem beziehen, werden daher im vorliegenden Buche nicht behandelt, sondern es wird das Gebäude der theoretischen Logik in jener Form dargestellt, in welcher es in der Beweistheorie Anwendung findet. Zwei Kapitel behandeln die Arithmetik der theoretischen Logik: den *Aussagenkalkül* und seine Umdeutung als *Prädikaten-* und *Klassenkalkül;* dann folgt wieder in zwei Kapiteln die ausführliche Entwicklung des tiefsten Gebietes, der Funktionentheorie der theoretischen Logik: des *Funktionenkalküls* in engerer und weiterer Formulierung. Hier wird auf das höchste Problem der theoretischen Logik, auf das logische Entscheidungsproblem eingegangen, das die auf spezielle Axiomensysteme beziehende Entscheidungsprobleme als Spezialfälle enthält.

Das Buch ist übrigens auch unabhängig vom später zu erscheinenden HILBERT—BERNAYSschen Werke ein abgerundetes Ganzes; der erweiterte Funktionenkalkül, welcher, nach Beseitigung der logischen Paradoxien mittels der Typentheorie, zu einem anderen, WHITEHEAD—RUSSELLschen Aufbau der Mathematik führt (welche mit dem radikal-intuizionistischen Standpunkte überhaupt nicht vereinbar ist), wird eben wegen der Vollständigkeit behandelt, da die Beweistheorie ohne denselben auskommt. Vermöge der klaren Darstellung des Buches wird dasselbe gewiss das beliebteste Lehrbuch der theoretischen Logik.

Dem HILBERT—BERNAYSschen Werke sehen wir mit grosser Erwartung entgegen.

L. Kalmár.