Sur la théorie des groupes.

Par ETIENNE GRYNAEUS à Budapest.

1. La théorie de la structure des groupes finis est fondée par M. E. CARTAN sur la considération des expressions de PFAFF qui sont invariantes par les transformations du groupe des paramètres. Dans sa Note : „La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile“ [1]) il développe une méthode à former ces expressions de PFAFF en partant des équations finies du groupe. Le groupe de transformations donné étant à r paramètres chacun des deux groupes des paramètres Γ et $\bar{\Gamma}$ laisse invariantes r expressions de PFAFF. En les désignant respectivement par $\overset{k}{\omega}$ et $\overset{k}{\bar{\omega}}$ $(k=1,\ldots,r)$ je me propose de faire voir le lien étroit qui existe entre les

$\overset{k}{\omega}$ et les transformations infinitésimales de $\bar{\Gamma}$,

$\overset{k}{\bar{\omega}}$ et les transformations infinitésimales de Γ.

A cet effet je suppose que l'on ait, dans un R_n, un groupe simplement transitif

$$X_k f = \underset{k}{\xi}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^{\lambda}} \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{1}$$

qui laisse invariantes n expressions indépendantes de PFAFF

$$\overset{l}{\omega} = \overset{l}{a}_{\lambda}\, dx^{\lambda} \qquad (l=1,\ldots,n). \tag{2}$$

Pour qu'il soit ainsi, il faut et il suffit, que le groupe prolongé

$$X_k^{(1)} f = \underset{k}{\xi}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \dot{x}^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\,; \quad \dot{x}^{\lambda} = \frac{dx^{\lambda}}{dt} \tag{3}$$

[1]) *Bulletin des Sciences Math.*, **34** (1910), p 250—283.

admette les n invariantes

(4) $$\overset{l}{g} = \overset{l}{a}_\lambda \dot{x}^\lambda \qquad (l = 1, \ldots, n)$$

c'est à dire que l'on ait $X_k^{(1)} \overset{l}{g} = 0 \ (k, l = 1, \ldots, n)$. Or on a

(5) $$\begin{aligned} X_k^{(1)} \overset{l}{g} &= \underset{k}{\xi}^\lambda \frac{\partial \overset{l}{a}_\mu}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\mu + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\mu}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\lambda \overset{l}{a}_\mu = \\ &= \underset{k}{\xi}^\lambda \frac{\partial \overset{l}{a}_\mu}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\mu + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \overset{l}{a}_\lambda = \left(X_k(\overset{l}{a}_\mu) + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} \overset{l}{a}_\lambda \right) \dot{x}^\mu \end{aligned}$$

et puisque les $\dot{x}^\mu$ sont indépendants, on en déduit

(6) $$X_k(\overset{l}{a}_\mu) + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} \overset{l}{a}_\lambda = 0 \qquad (k, l, \mu = 1, \ldots, n).$$

Or les $\overset{l}{a}_\lambda \ (l = 1, \ldots, n)$ constituent, par hypothèse, n vecteurs covariants indépendants, donc on a

$$A = \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \ldots & \overset{1}{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{a}_1 & \ldots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dès lors, si l'on désigne par $\underset{k}{v}^\lambda \ (\lambda = 1, \ldots, n)$ les mineurs de la k-ième ligne de A divisés par A, on sait que les

(7) $$\underset{k}{v}^\lambda \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

constituent un système de n vecteurs contravariants, indépendants entre eux et l'on a en particulier

(8) $$\underset{k}{v}^\lambda \overset{l}{a}_\lambda = \varepsilon_k^l$$

(9) $$\underset{k}{v}^\nu \overset{k}{a}_\varrho = \varepsilon_\varrho^\nu$$

où $\varepsilon_i^k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ selon que $\begin{cases} i \neq k \\ i = k. \end{cases}$

Ceci posé, envisageons les n transformations infinitésimales

(10) $$V_i f = \underset{i}{v}^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

nous allons démontrer que l'on a

(11) $$(X_k V_i) f \equiv 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

En effet, on a

$$(12) \qquad (X_k V_i) f = [X_k(\underset{i}{v}^\lambda) - V_i(\underset{k}{\xi}^\lambda)] \frac{\partial f}{\partial x^\lambda};$$

or

$$(13) \qquad V_i(\underset{k}{\xi}^\lambda) = \underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu}$$

et puisque des équations (6), écrites pour $l = 1, \ldots, n$, on tire

$$\frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \ldots & \overset{1}{a}_{\lambda-1} & X_k(\overset{1}{a}_\mu) & \overset{1}{a}_{\lambda+1} & \ldots & \overset{1}{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{a}_1 & \ldots & \overset{n}{a}_{\lambda-1} & X_k(\overset{n}{a}_\mu) & \overset{n}{a}_{\lambda+1} & \ldots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix} =$$

$$= -\sum_{l=1}^{n} X_k(\overset{l}{a}_\mu) \underset{l}{v}^\lambda = -\underset{b}{v}^\lambda X_k(\overset{b}{a}_\mu),$$

(13) s'écrira

$$V_i(\underset{k}{\xi}^\lambda) = -\underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda X_k(\overset{b}{a}_\mu) = -\underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \overset{b}{a}_\mu}{\partial x^\nu}.$$

D'autre part on a, d'après (8),

$$\underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \overset{b}{a}_\mu}{\partial x^\nu} = -\overset{b}{a}_\mu \frac{\partial \underset{i}{v}^\mu}{\partial x^\nu}$$

et par suite

$$V_i(\underset{k}{\xi}^\lambda) = \underset{b}{v}^\lambda \overset{b}{a}_\mu \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\mu}{\partial x^\nu};$$

donc, d'après (9),

$$V_i(\underset{k}{\xi}^\lambda) = \varepsilon^\lambda_\mu \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\mu}{\partial x^\nu} = \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\lambda}{\partial x^\nu} = X(\underset{i}{v}^\lambda)$$

et par conséquent (11) devient

$$(X_k V_i) f = [X_k(\underset{i}{v}^\lambda) - X_k(\underset{i}{v}^\lambda)] \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \equiv 0,$$

c. q. f. d.

Il en résulte,[2]) que les $V_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ constituent n transformations infinitésimales définissant le *groupe réciproque* du groupe $X_k f$ $(k = 1, \ldots, n)$ donné. On a donc le théorème.

---

[2]) *Voir* par exemple: LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen* (Leipzig 1893), p. 444.

Si un groupe simplement transitif laisse invariantes les expressions de Pfaff *indépendantes*

$$\overset{l}{\omega} = \overset{l}{a}_\lambda dx^\lambda \qquad (l = 1, \ldots, n)$$

et en désignant par $A_{k\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ *les mineurs de la k-ième ligne du déterminant, différent de zéro,*

$$A = \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_1 & \ldots & \overset{1}{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{a}_1 & \ldots & \overset{n}{a}_n \end{vmatrix},$$

les n vecteurs contravariants

$$\underset{k}{v}^\lambda = \frac{A_{k\lambda}}{A} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

définissent, à l'aide des formules

$$V_k f = \underset{k}{v}^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

les n transformations infinitésimales du réciproque du groupe donné.

Il est à prévoir, que ce théorème admet un réciproque. Nous le démontrons de la manière suivante.

Soit $V_k f = \underset{k}{v}^\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ $(k = 1, \ldots, n)$ le groupe simplement transitif, réciproque du groupe simplement transitif

$$X_k f = \underset{k}{\xi}^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Alors on a

$$X_k(\underset{i}{v}^\lambda) - V_i(\underset{k}{\xi}^\lambda) = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

c'est à dire

$$\underset{k}{\xi}^\mu \frac{\partial \underset{i}{v}^\lambda}{\partial x^\mu} = \underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu}. \tag{14}$$

Formons le déterminant

$$V = \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^1 & \ldots & \underset{1}{v}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{n}{v}^1 & \ldots & \underset{n}{v}^n \end{vmatrix}$$

et désignons par $\overset{k}{a}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ les mineurs de la k-ième ligne de V divisés par V. Nous allons démontrer, que les n expressions de Pfaff

$$\overset{k}{\omega} = \overset{k}{a}_\lambda dx^\lambda \qquad (k = 1, \dots, n)$$

sont invariantes par les transformations infinitésimales du groupe $X_k f$, c'est à dire que l'on a (*voir* (6))

$$(15) \qquad \underset{k}{\xi}^\lambda \frac{\partial \overset{l}{a}_\mu}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} \overset{l}{a}_\lambda = 0 \qquad (k, l, \mu = 1, \dots, n).$$

A cause de (9) et (8) on peut mettre le premier membre de (14) sous la forme suivante

$$\underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\lambda}{\partial x^\nu} = \underset{b}{v}^\lambda \overset{b}{a}_\mu \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \underset{i}{v}^\mu}{\partial x^\nu} = - \underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda \underset{k}{\xi}^\nu \frac{\partial \overset{b}{a}_\mu}{\partial x^\nu} = - \underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda X_k(\overset{b}{a}_\mu);$$

donc (14) s'écrira

$$\underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} = - \underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda X_k(\overset{b}{a}_\mu).$$

En multipliant par $\overset{i}{a}_\nu \overset{l}{a}_\lambda$, nous obtiendrons

$$\overset{i}{a}_\nu \overset{l}{a}_\lambda \underset{i}{v}^\mu \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\mu} + \overset{i}{a}_\nu \overset{l}{a}_\lambda \underset{i}{v}^\mu \underset{b}{v}^\lambda X_k(\overset{b}{a}_\mu) = 0$$

ou bien

$$\overset{l}{a}_\lambda \frac{\partial \underset{k}{\xi}^\lambda}{\partial x^\nu} + X_k(\overset{l}{a}_\nu) = 0,$$

et ce ne sont que les équations (15), écrites sous une forme un peu différente.

Nous avons donc le théorème suivant, réciproque du précédent:

$V_k f = \underset{k}{v}^\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ $(k = 1, \dots, n)$ étant le groupe simplement transitif réciproque du groupe $X_k f = \underset{k}{\xi}^\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ $(k = 1, \dots, n)$ simplement transitif, en désignant par $\overset{k}{a}_\lambda$ $(\lambda = 1, \dots, n)$ les mineurs de la k-ième ligne du déterminant

$$V = \begin{vmatrix} \underset{1}{v}^1 & \dots & \underset{1}{v}^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \underset{n}{v}^1 & \dots & \underset{n}{v}^n \end{vmatrix}.$$

divisés par V, les n expressions indépendentes de Pfaff

$$\overset{k}{\omega} = \overset{k}{a}_\lambda dx^\lambda \qquad (k=1,\ldots,n)$$

sont invariantes par les transformations infinitésimales du groupe $X_k f$.

2. Remarquons maintenant, qu'étant donné un groupe à r paramètres par ses transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$, son premier groupe des paramètres étant Γ, celui-ci est simplement transitif et le second groupe des paramètres $\overline{\Gamma}$ est son réciproque. En désignant par

$$\begin{aligned} U_k f &= \underset{k}{u}^\lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha^\lambda} \\ \overline{U}_k f &= \underset{k}{\overline{u}}^\lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha^\lambda} \end{aligned} \qquad (k=1,\ldots,r)$$

les transformations infinitésimales de Γ resp. de $\overline{\Gamma}$, portant sur les paramètres α, nous savons, d'après ce qui vient d'être dit, que les $U_k f$ $(k=1,\ldots,r)$ laissent invariantes les r expressions de Pfaff indépendentes

$$\overset{l}{\overline{\omega}} = \overset{l}{\overline{a}}_\lambda d\alpha^\lambda \qquad (l=1,\ldots,r)$$

où $\overset{l}{\overline{a}}_\lambda$ $(\lambda=1,\ldots,r)$ désigne les quotients par $\overline{U}$ des mineurs de la l-ième ligne du déterminant

$$\overline{U} = \begin{vmatrix} \underset{1}{\overline{u}}^1 & \ldots & \underset{1}{\overline{u}}^r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{r}{\overline{u}}^1 & \ldots & \underset{r}{\overline{u}}^r \end{vmatrix}.$$

De même, $\overline{U}_k f$ $(k=1,\ldots,r)$ laisse invariantes les r expressions indépendantes de Pfaff

$$\overset{l}{\omega}_\lambda = \overset{l}{a}_\lambda d\alpha^\lambda \qquad (l=1,\ldots,r)$$

les $\overset{l}{a}_\lambda$ étant formées de la même manière que les $\overset{l}{\overline{a}}_\lambda$ du déterminant

$$U = \begin{vmatrix} \underset{1}{u}^1 & \ldots & \underset{1}{u}^r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{r}{u}^1 & \ldots & \underset{r}{u}^r \end{vmatrix}.$$

Donc on a le théorème suivant:

Étant donné un groupe à r paramètres par ses transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$, ses deux groupes de paramètres étant

Γ et $\overline{\Gamma}$, aux transformations infinitésimales respectives

$$\begin{array}{lll} \Gamma \quad . \quad . \quad . \quad . & U_k f = \underset{k}{u^\lambda} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^\lambda} & \\ & & (k = 1, \ldots, r). \\ \overline{\Gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . & \overline{U}_k f = \underset{k}{\overline{u}^\lambda} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^\lambda} & \end{array}$$

Les deux déterminants respectifs, non identiquement nuls

$$U = \begin{vmatrix} \underset{1}{u^1} & \ldots & \underset{1}{u^r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{r}{u^1} & \ldots & \underset{r}{u^r} \end{vmatrix}, \quad \overline{U} = \begin{vmatrix} \underset{1}{\overline{u}^1} & \ldots & \underset{1}{\overline{u}^r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{r}{\overline{u}^1} & \ldots & \underset{r}{\overline{u}^r} \end{vmatrix}$$

permettent chacun de former r vecteurs covariants $\overset{l}{a}_\lambda$ et $\overset{l}{\overline{a}}_\lambda$ $(l = 1, \ldots, r)$ où $\overset{l}{a}_\lambda$ et $\overset{l}{\overline{a}}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, r)$ désignent les quotiens des mineurs de la l-ème ligne de U resp. de $\overline{U}$ par U resp. par $\overline{U}$.

Les r expressions indépendantes de Pfaff

$$\overset{l}{\omega} = \overset{l}{a}_\lambda \, d\alpha^\lambda \qquad (l = 1, \ldots, r)$$

sont invariantes par les transformations infinitésimales du groupe $\overline{\Gamma}$. De même, les r expressions indépendantes de Pfaff

$$\overset{l}{\overline{\omega}} = \overset{l}{\overline{a}}_\lambda \, d\alpha^\lambda \qquad (l = 1, \ldots, r)$$

sont invariantes par les transformations infinitésimales du groupe Γ.

En outre:

1°. *La connaissance des transformations infinitésimales de Γ et celle des $\overset{l}{\overline{\omega}}$ $(l = 1, \ldots, r)$ permet de former les transformations infinitésimales du groupe $\overline{\Gamma}$.*

2°. *La connaissance des transformations infinitésimales de $\overline{\Gamma}$ et celle des $\overset{l}{\omega}$ $(l = 1, \ldots, r)$ permet de former les transformations infinitésimales du groupe Γ.*

Ce deux propositions résultent immédiatement de notre premier théorème.

(Reçu le 20 septembre 1928.)