Über Wertverteilung bei rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Von M. FEKETE in Jerusalem.

1. Im ersten Bande dieser Acta habe ich eine kurze Note „Über Zwischenwerte bei komplexen Polynomen" veröffentlicht, wo ich den Fundamentalsatz über stetige Funktionen $f(x)$ der reellen Veränderlichen x — laut welchem diese jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, $(f(a) \neq f(b))$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$, $(a < b)$ mindestens einmal annehmen — auf komplexe Polynome $P(z)$ übertrug. Später habe ich das Ergebnis der erwähnten Note auf verschiedene Weisen verschärft und verallgemeinert[1]) und auch Andere haben sich diesen Untersuchungen angeschlossen.[2]) Es ging darum: mit Hilfe der für die betrachteten Funktionen $P(z)$ charakteristischen Daten: Gradzahl oder Gliederanzahl möglichst-kleine Bereiche um die von einander verschiedenen, sonst beliebig vorgegebenen komplexen Punkte a und b abzugrenzen, wo jeder Wert γ „zwischen"[3]) $\alpha = P(a)$ und $\beta = P(b)$, oder, allgemeiner

---

[1]) M. FEKETE, *a*) Analoga zu den Sätzen von ROLLE und BOLZANO für komplexe Polynome und Potenzreihen mit Lücken, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, **32** (1923), S. 299—306.; *b*) Über Gebiete, in denen komplexe Polynome jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen, *Math. Zeitschrift*, **22** (1925), S. 1—7.; *c*) Über die Nullstellenverteilung bei Polynomen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, **34** (1925), S. 220—233.; *d*) Über die Wurzelverteilung analytischer Funktionen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, **36** (1927), S. 216—222.

[2]) J. v. SZ. NAGY, Über einen Satz des Herrn M. FEKETE, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, 32 (1923), S. 307—309.; E. BÁLINT, Bemerkungen zu der Note „Analoga zu den Sätzen von ROLLE und BOLZANO..." des Herrn M. FEKETE, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, **34** (1925), S. 233—237.; B. SU, Note on a Theorem of FEKETE, *Proceedings of the Imperial Academy* (of Japan), **3** (1927), S. 118—121.

[3]) Die komplexe Zahl r liegt *zwischen* den beiden komplexen Zahlen p und q, falls ihr Bildpunkt auf der komplexen Zahlenebene auf die Verbindungsstrecke der Bildpunkte von p und q fällt.

jeder Wert γ aus einer wohldefinierten Nachbarschaft von α und β mindestens einmal von $P(z)$ angenommen wird. Von allen diesbezüglichen Resultaten will ich hier einen von mir stammenden Satz anführen, welchen ich im Nachfolgenden — mutatis mutandis — auf rationale Funktionen von z verallgemeinern werde:

I. *„Sei $a \neq b$, sonst beliebig, $0 < \varphi \leqq \pi$. Sei $P(z)$ ein Polynom n-ten Grades ($n \geqq 1$), für welches $P(a) = \alpha$, $P(b) = \beta$, $\alpha \neq \beta$ ausfällt. Ist $\gamma \neq \alpha$ und $\neq \beta$, sonst irgendein komplexer Wert, wofür*[1])

$$(1) \qquad \left|\arg\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\right| \geqq \varphi,$$

so nimmt $P(z)$ ihn mindestens in einem solchen Punkte c an, wofür

$$(2) \qquad \left|\arg\frac{c-a}{c-b}\right| \geqq \frac{\varphi}{n}$$

besteht.“

2. Die Ungleichungen (1) bzw. (2) charakterisieren die Punkte γ bzw. c eines Kreisbogenzweieckes $K(\alpha, \beta; \varphi)$ bzw. $K\left(a, b; \frac{\varphi}{n}\right)$ mit den Eckpunkten α, β bzw. a, b, von dessen (von den Eckpunkten verschiedenen) Randpunkten aus die Strecke $\overline{\alpha\beta}$, bzw. $\overline{ab}$ unter den Winkel φ bzw. $\frac{\varphi}{n}$ erscheint. Ich werde zeigen, dass auch bei den rationalen Funktionen

$$R(z) = \frac{p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n}{q_0 + q_1 z + \ldots + q_m z^m} = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei $(P(z), Q(z)) \sim 1$, $n \geqq 0$, $m \geqq 0$, $n + m \geqq 1$, $p_n \neq 0$, $q_m \neq 0$ ist, sich dem Kreisbogenzweieck $K(\alpha, \beta; \varphi)$ Kreisbogenzweiecke K zuordnen lassen, derart dass K nur von a, b, φ, m und n abhängt und dass es, sobald $R(a) = \alpha$, $R(b) = \beta$, $\alpha \neq \beta$ ist, zu jedem $\gamma \neq \alpha, \beta$ aus $K(\alpha, \beta; \varphi)$ mindestens ein c aus K mit $R(c) = \gamma$ gibt, vorausgesetzt, dass für sämtliche Werte z aus K $R(z)$ regulär bleibt: *es entspricht* $\mathsf{K} = K\left(a, b; \frac{\varphi}{m+\mu}\right)$ *den Anforderungen, wenn* $\mu = \operatorname{Max}\{m, n\}$ *ist.*

3. Die letzterwähnte Tatsache ist als spezieller Fall enthalten im Hauptresultat vorliegender Note, das ich im folgenden Satze formuliere:

[1]) Sei $z \neq 0$; dann ist $-\pi < \arg z \leqq \pi$.

II. *Es seien a und b von einander verschiedene, sonst beliebig vorgegebene komplexe Zahlen. Es seien n und m nichtnegative ganze Zahlen, derart, dass $\mu = \mathrm{Max}\{m, n\} \geqq 1$ ist. Es sei $0 < \varphi \leqq \pi$, $0 \leqq \psi \leqq \frac{\varphi}{\mu(m+\mu)}$. Ist $R(z)$ eine nichtreduzierbare rationale Funktion $\frac{P(z)}{Q(z)}$, deren Zähler $P(z)$ den genauen Grad n und deren Nenner $Q(z)$ den genauen Grad m hat und für welche $R(a) \neq R(b)$ ausfällt, so hat die Gleichung $R(z) = \gamma$ im (in Allgemeinen inbezug auf $\overline{ab}$ asymmetrischen) Kreisbogenzweieck*

$$\arg\frac{z-b}{z-a} \geqq \frac{\varphi}{m+\mu} + m\psi, \quad \arg\frac{z-b}{z-a} \leqq -\frac{\varphi}{m+\mu} + \mu\psi \tag{3}$$

mindestens eine Wurzel, wenn nur $R(z)$ daselbst regulär ist und γ den Bedingungen

$$\gamma \neq R(a), \ \gamma \neq R(b), \quad \left|\arg\frac{\gamma - R(b)}{\gamma - R(a)}\right| \geqq \varphi \tag{4}$$

genügt

4. Ist $m = 0$ und folglich $\mu = n$, so reduziert sich der Bereich (3) auf das Kreisbogenzweieck

$$\arg\frac{z-b}{z-a} \geqq \frac{\varphi}{n}, \quad \arg\frac{z-b}{z-a} \leqq -\frac{\varphi}{n} + n\psi, \quad \left(0 \leqq \psi \leqq \frac{\varphi}{n^2}\right),$$

das seinerseits das Kreisbogenzweieck $\left|\arg\frac{z-b}{z-a}\right| \geqq \frac{\varphi}{n}$ enthält, in welchem nach I. mindestens eine Wurzel von $R(z) = \gamma$ liegen muss, sobald γ den Bedingungen (4) genügt.

Beim Beweise von II. kann ich also annehmen, dass $m \geqq 1$ und $Q(z) = q_m \prod_{\varkappa=1}^{m} (z - d_\varkappa)$ ist, wobei entweder

$$0 \leqq \arg\frac{d_\varkappa - b}{d_\varkappa - a} < \frac{\varphi}{m+\mu} + m\psi, \tag{5}$$

oder

$$0 \geqq \arg\frac{d_\varkappa - b}{d_\varkappa - a} > -\frac{\varphi}{m+\mu} + \mu\psi \tag{6}$$

besteht und ich habe zu zeigen, dass

$$P(z) - \gamma Q(z) = S(z) = s_0 + \ldots + s_\nu z^\nu = s_\nu \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (z - c_\varkappa), \quad s_\nu \neq 0$$

mindestens eine von seinen Nullstellen $c_\varkappa$ im Bereiche (3) hat.

(Leichtersichtlich ist $\nu \geqq 1$; denn wäre $P(z)-\gamma Q(z)=s_0$, so wäre entweder $n=0$, $\gamma=0$, oder aber $\gamma \neq 0$, $n=m$, d. h. jedenfalls $\mu=m$, ferner

$$\frac{\gamma-R(b)}{\gamma-R(a)}=\frac{P(b)-\gamma Q(b)}{P(a)-\gamma Q(a)}\cdot\frac{Q(a)}{Q(b)}=\frac{Q(a)}{Q(b)},$$

d. h., wegen (4),

$$\left|\arg\frac{Q(a)}{Q(b)}\right|\geqq\varphi,$$

also müsste, nach I., $Q(z)=0$ in $K\left(a, b; \frac{\varphi}{m}\right)$ und folglich, wegen $0 \leqq \psi \leqq \frac{\varphi}{2m^2}$, auch im Bereiche (3) eine Wurzel haben, gegen (5) und (6).)

Was nun die obige Behauptung betreffs der Nullstellen $c_\varkappa$ belangt, folgt ihre Richtigkeit etwa so: würden sämtliche $c_\varkappa$ ausserhalb (3) liegen, d. h. wäre entweder

$$0 \leqq \arg\frac{c_\varkappa-b}{c_\varkappa-a}<\frac{\varphi}{m+\mu}+m\psi, \tag{7}$$

oder

$$0 \geqq \arg\frac{c_\varkappa-b}{c_\varkappa-a}>-\frac{\varphi}{m+\mu}+\mu\psi, \tag{8}$$

so wäre, (7), (8), (5) und (6) zufolge,

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\arg\frac{c_\varkappa-b}{c_\varkappa-a}+\sum_{\varkappa=1}^{m}\arg\frac{d_\varkappa-a}{d_\varkappa-b}<\frac{\nu+m}{\mu+m}\varphi+m(\nu-\mu)\psi\leqq\varphi,$$

und

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\arg\frac{c_\varkappa-b}{c_\varkappa-a}+\sum_{\varkappa=1}^{m}\arg\frac{d_\varkappa-a}{d_\varkappa-b}>-\frac{\nu+m}{\mu+m}\varphi+(\nu\mu-m^2)\psi\geqq-\varphi;$$

daher wäre

$$-\varphi<\arg\left\{\prod_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{c_\varkappa-b}{c_\varkappa-a}\prod_{\varkappa=1}^{m}\frac{d_\varkappa-a}{d_\varkappa-b}\right\}<\varphi,$$

und das widerspricht der Tatsache

$$\frac{\gamma-R(b)}{\gamma-R(a)}=\frac{P(b)-\gamma Q(b)}{P(a)-\gamma Q(a)}\,\frac{Q(a)}{Q(b)}=\prod_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{c_\varkappa-b}{c_\varkappa-a}\prod_{\varkappa=1}^{m}\frac{d_\varkappa-a}{d_\varkappa-b},$$

wegen (4). W. z. b. w.

5. Im eben bewiesenen Satze II. habe ich das klassische Theorem von Bolzano über stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen auf komplexe rationale Funktionen übertragen. Mein

Beweisverfahren ist mit wenigen Änderungen auch zu einer Übertragung des Rolleschen Theorems auf die genannte Funktionenklasse geeignet. In der Tat, die Frage nach der Lage der Nullstellen bei den Derivierten von rationalen Funktionen, welche an zwei vorgeschriebenen Stellen a, b $(a \neq b)$ gleiche Werte annehmen und zwischen a und b regulär sind, ist offenbar enthalten in der folgenden: Die rationale Funktion $R(z)$ befriedige die Bedingung

$$\int_a^b R(z)\,dz = 0 \tag{9}$$

($R(z)$ regulär auf der Integrationsstrecke $\overline{ab}$); wie sind dann ihre Nullstellen verteilt? Nun gibt, mit Hilfe des genannten Beweisverfahrens, folgender Satz eine Lösung letzterer Frage:

III. *Es sei* $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *eine rationale Funktion, deren Zähler* $P(z)$ *den genauen Grad* $n \geqq 0$ *und deren Nenner* $Q(z)$ *den genauen Grad* $m \geqq 0$ *hat und es sei* $m + n \geqq 1$. *Ist* $Q(z)$ *auf der Strecke von* a *bis* b *von Null verschieden und erfüllt* $R(z)$ *die Bedingung* (9), *wenn längs der genannten Strecke integriert wird, so verschwindet* $R(z)$ *im Kreisbogenzweieck* $K\left(a, b; \dfrac{\pi}{m+n}\right)$; *es sei denn, dass* $R(z)$ *daselbst einen Pol hat.*

6. Beim Beweise stütze ich mich auf folgenden, auch an und für sich interessanten

H i l f s s a t z[5]): *Es seien* b *und* $a \neq b$ *beliebige komplexe Zahlen,* $p(z)$ *ein Polynom vom genauen Grade* ν $(\nu \geqq 1)$, $f(z)$ *eine stetige Funktion der komplexen Veränderlichen* z, *die auf der Strecke* S *von* a *bis* b *der Bedingung* $f(z) \geqq 0$ *genügt und ein nicht verschwindendes Integral* $\int_a^b f(z)\,dz$ *liefert, falls längs* S *integriert wird. Es sei, bei Integration längs* S,

$$\int_a^b p(z) f(z)\,dz = 0. \tag{10}$$

Dann hat $p(z)$ *mindestens eine Nullstelle im Kreisbogenzweieck* $K\left(a, b; \dfrac{\pi}{\nu}\right)$.

[5]) Im Spezialfalle $f(z) \equiv 1$ ist dieser Hilfssatz in einem Satze des Verfassers enthalten. Vgl. a. a. O. [1]) *b*), S. 4., wo auch Litteraturangaben der behandelten Frage vorzufinden sind.

7. Um zunächst die Richtigkeit dieses Hilfssatzes zu beweisen, beschränke ich mich einfachheitshalber auf den speziellen Fall, wo $a=0$, $b=1$ ist. Dann kann ich die Existenz einer Nullstelle von $p(z)$ in $K\left(a, b; \frac{\pi}{\nu}\right)$ so folgern: Ich betrachte die Annäherungssummen:

$$\sigma_\varkappa = p(z_0) f(z_0)(z_1-z_0) + \\ + p(z_1) f(z_1)(z_2-z_1) + \ldots + p(z_{\varkappa-1}) f(z_{\varkappa-1})(z_\varkappa - z_{\varkappa-1}) \tag{11}$$

bzw.

$$\tau_\varkappa = f(z_0)(z_1-z_0) + f(z_1)(z_2-z_1) + \ldots + f(z_{\varkappa-1})(z_\varkappa - z_{\varkappa-1}) \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

des integrals $\int_0^1 p(z) f(z)\, dz$ bzw. $\int_0^1 f(z)\, dz$, gebildet mit Hilfe der Punkte

$$z_r = \frac{r}{\varkappa} \qquad (r = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1), \tag{13}$$

welche das Intervall von $z_0 = 0$ bis $z_\varkappa = 1$ in $\varkappa$ gleiche Strecken einteilen. Nach (10) konvergieren die $\sigma_\varkappa$, also wegen der Voraussetzung $\int_0^1 f(z)\, dz > 0$, auch die für $\varkappa \geqq \varkappa_0$ existierenden Quotienten $\frac{\sigma_\varkappa}{\tau_\varkappa}$ bei unbegrenzt wachsendem $\varkappa$ gegen 0. Ist also gezeigt, dass die Gleichung

$$p(z) = \frac{\sigma_\varkappa}{\tau_\varkappa} \qquad (\varkappa \geqq \varkappa_0) \tag{14}$$

für jedes genügend grosse $\varkappa$ mindestens eine Wurzel im Kreisbogenzweieck $K\left(0, 1; \frac{\pi}{\nu}\right)$ besitzt, so folgt daraus aus Stetigkeitsgründen, dass daselbst auch $p(z) = 0$ eine Wurzel hat. Nun folgt für $\varkappa \geqq \varkappa_0$, nach (13), aus (11) und (12),

$$\frac{\sigma_\varkappa}{\tau_\varkappa} = \frac{\sum\limits_{r=0}^{\varkappa-1} p(z_r) f(z_r)}{\sum\limits_{r=0}^{\varkappa-1} f(z_r)},$$

also

$$\sum_{r=0}^{\varkappa-1} \left(p(z_r) - \frac{\sigma_\varkappa}{\tau_\varkappa}\right) f(z_r) = 0,$$

was sich, nach Einführung der Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\nu$ von (14), auch in der Form

$$(15)\quad (z_0-\zeta_1)(z_0-\zeta_2)\dots(z_0-\zeta_\nu)f(z_0)+\dots+$$
$$+(z_{\varkappa-1}-\zeta_1)(z_{\varkappa-1}-\zeta_2)\dots(z_{\varkappa-1}-\zeta_\nu)f(z_{\varkappa-1})=0$$

ausdrücken lässt. (15) ergibt sofort, dass, für $\varkappa \geqq \varkappa_0$, mindestens eine Wurzel von (14) im Innern von $K\left(0, 1; \frac{\pi}{\nu}\right)$ liegt. Wäre nämlich die Strecke $\overline{0, 1}$ aus jeder Wurzel ζ_s $(s=1, 2, \dots, \nu)$ unter einem Winkel $\leqq \frac{\pi}{\nu}$ zu sehen, d. h. würde für jedes ζ_s eine der beiden Relationen

$$(16)\qquad 0 \leqq \arg \frac{\zeta_s}{\zeta_s - 1} \leqq \frac{\pi}{\nu}$$

$$(17)\qquad 0 \leqq \arg \frac{\zeta_s - 1}{\zeta_s} \leqq \frac{\pi}{\nu}$$

bestehen, so würde die Summe

$$f(z_0)\frac{(z_0-\zeta_1)\dots(z_0-\zeta_p)}{(z_{\varkappa-1}-\zeta_1)\dots(z_{\varkappa-1}-\zeta_p)}+$$
$$+f(z_1)\frac{(z_1-\zeta_1)\dots(z_1-\zeta_p)(z_1-\zeta_{p+1})\dots(z_1-\zeta_\nu)}{(z_{\varkappa-1}-\zeta_1)\dots(z_{\varkappa-1}-\zeta_p)(z_0-\zeta_{p+1})\dots(z_0-\zeta_\nu)}+\dots+$$
$$+f(z_{\varkappa-1})\frac{(z_{\varkappa-1}-\zeta_{p+1})\dots(z_{\varkappa-1}-\zeta_\nu)}{(z_0-\zeta_{p+1})\dots(z_0-\zeta_\nu)},$$

— wobei $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ bzw. $\zeta_{p+1}, \dots, \zeta_\nu$ die der Bedingung (16) bzw. (17) genügenden Wurzeln von (14) bezeichnen — offenbar nur solche nichtverschwindende Glieder enthalten, deren Argumente nicht kleiner, als 0 und kleiner, als π sind; andererseits für $\varkappa \geqq \varkappa_0$, wegen $\tau_\varkappa > 0$, können nicht alle $f(z_r)$, also auch nicht sämtliche Glieder der fraglichen Summe verschwinden. Deshalb wäre diese Summe von 0 verschieden, im Widerspruche zu (15).

8. Aus dem eben Bewiesenen folgt Satz III. für $a=0$, $b=1$ einfach so:

Es sei $\overline{Q}(z)=\overline{q}_0+\dots+\overline{q}_m z^m$ dasjenige Polynom, das aus $Q(z)=q_0+\dots+q_m z^m$ durch Übergang zu den konjugiert komplexen Koeffizienten $\overline{q}_0, \dots, \overline{q}_m$ hervorgeht. Dann ist die Bedingung (9) mit

$$\int_0^1 \frac{P(z)\,\overline{Q}(z)}{Q(z)\,\overline{Q}(z)}\,dz = \int_0^1 P(z)\,\overline{Q}(z)\,\frac{1}{|Q(z)|^2}\,dz = 0$$

gleichbedeutend, also muss nach dem Hilfssatz die Gleichung

$$P(z)\,\overline{Q}(z)=0$$

im Kreisbogenzweiecke $K\left(0,\,1\,;\,\frac{\pi}{m+n}\right)$ mindestens eine Wurzel haben; folglich verschwindet daselbst auch entweder $P(z)$, oder $\overline{Q}(z)$ und somit $Q(z)$ mindestens einmal. Die allgemeine Gültigkeit von Satz III. erhält man auf Grund des jetzt bewiesenen Spezialfalles mit Hilfe von Koordinatentransformation.

9. Zum Schlusse meiner Betrachtungen will ich hier noch eine Verallgemeinerung des Satzes III. herleiten, die sich auf Grund des obigen Hilfssatzes sofort beweisen lässt:

IV. *Es sei* $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ *eine rationale Funktion, deren Zähler* $P(z)$ *den genauen Grad* $n\geqq 0$ *und deren Nenner* $Q(z)$ *den genauen Grad* $m\geqq 0$ *hat und es sei* $m+n=\nu\geqq 1$. *Ist* $Q(z)$ *auf der Strecke von* 0 *bis* 1 *von Null verschieden und erfüllt* $R(z)$, *bei Integration längs dieser Strecke, die Bedingungen:*

$$\int_0^1 R(z)\,z^r\,dz=0,\quad r=0,\ldots,\mu-1,$$

wobei $1\leqq\mu\leqq\nu$ *ist, so ist die Gesamtanzahl der Nullstellen und Pole von* $R(z)$, *die im Kreisbogenzweieck* $K\left(0,\,1\,;\frac{\pi}{m+n}\right)$ *liegen, mindestens* μ.

Satz IV. ist im Falle $\mu=1$ mit Satz III. identisch. Für $\mu=2$ folgt seine Richtigkeit etwa so: Aus den Bedingungen

$$\int_0^1 R(z)\,dz=0,\quad \int_0^1 R(z)\,z\,dz=0,$$

die auch in der Form

$$\int_0^1 \frac{P(z)\,\overline{Q}(z)}{|Q(z)|^2}\,dz=0,\quad \int_0^1 \frac{P(z)\,\overline{Q}(z)}{|Q(z)|^2}\,z\,dz=0$$

geschrieben werden können, folgt bei jedem α

$$\int_0^1 \frac{P(z)\,\overline{Q}(z)\,(z-\overline{\alpha})}{|Q(z)|^2}\,dz=0. \tag{18}$$

Ist nun α eine, nach Satz III. sicherlich existierende Wurzel von

16

$P(z)\,\bar{Q}(z)=0$ im Kreisbogenzweieck $K\left(0,\,1\,;\,\frac{\pi}{m+n}\right)$, so kann man (18) auch auf die Form

$$\int_0^1 \frac{P(z)\,\bar{Q}(z)}{z-\alpha}\,\frac{(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})}{|Q(z)|^2}\,dz=\int_0^1 \frac{P(z)\,\bar{Q}(z)}{z-\alpha}\left|\frac{z-\alpha}{Q(z)}\right|^2 dz=0$$

bringen, woraus sich nach unserem Hilfssatze die Existenz einer Wurzel der Gleichung

$$\frac{P(z)\,\bar{Q}(z)}{z-\alpha}=0$$

im Kreisbogenzweieck $K\left(0,\,1\,;\,\frac{\pi}{m+n-1}\right)$ ergibt; folglich muss in $K\left(0,\,1\,;\,\frac{\pi}{m+n}\right)$ $P(z)\,\bar{Q}(z)=0$ und deshalb auch $P(z)\,Q(z)=0$ mindestens zwei Wurzeln besitzen, wie behauptet wurde. Es ist bemerkenswert, das nach dem Vorangehenden mindestens eine von diesen Wurzeln bereits in $K\left(0,\,1\,;\,\frac{\pi}{m+n-1}\right)$ enthalten ist.

Die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes für beliebiges $2<\mu\leqq m+n$ erkennt man mit Hilfe von vollständiger Induktion, durch ähnlichen Gedankengang, wie der eben angewandte; er liefert sogar (wie im Spezialfalle $\mu=2$) auch eine Verschärfung des Satzes IV., wonach *eine Wurzel von* $P(z)\,Q(z)=0$ *schon in* $K\left(0,1;\frac{\pi}{m+n-\mu+1}\right)$, *zwei Wurzeln in* $K\left(0,1;\frac{\pi}{m+n-\mu+2}\right)$, $\ldots$, r *Wurzeln in* $K\left(0,\,1\,;\,\frac{\pi}{m+n-\mu+r}\right),\ldots,$ μ *Wurzeln in* $K\left(0,\,1\,;\,\frac{\pi}{m+n}\right)$ *enthalten sein müssen.*

In der Tat, seien die „Momente" $M_r=\int_0^1 R(z)z^r\,dz$ von $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ für $r=0,1,\ldots,\mu-1$ gleich 0 und setzen wir als richtig voraus, dass das Verschwinden von $M_0, M_1,\ldots,M_{\mu-2}$ die Existenz von $\mu-1$ solcher Wurzeln der Gleichung $P(z)\,Q(z)=0$ nach sich zieht, welche sämtlich in $K\left(0,\,1\,;\,\frac{\pi}{m+n}\right)$ enthalten sind, während $\mu-2$ von ihnen bereits in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-1}\right)$; $\mu-3$ von ihnen in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-2}\right), \ldots, 1$ von ihnen in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+2}\right)$ liegt. Dann hat auch $P(z)\bar{Q}(z)=0$ $\mu-1$ Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu-1}$ in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n}\right)$ und aus

$$M_0 = M_1 = \ldots = M_{\mu-1} = 0$$

folgt

$$\int_0^1 \frac{P(z)}{Q(z)} (z-\bar{\alpha}_1)(z-\bar{\alpha}_2)\ldots(z-\bar{\alpha}_{\mu-1})\,dz =$$

$$\int_0^1 \frac{P(z)\bar{Q}(z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{\mu-1})} \frac{|z-\alpha_1|^2|z-\alpha_2|^2\ldots|z-\alpha_{\mu-1}|^2}{|Q(z)|^2}\,dz = 0,$$

was nach dem obigen Hilfssatze die Existenz einer Wurzel von

$$\frac{P(z)\bar{Q}(z)}{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{\mu-1})} = 0$$

in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+1}\right)$ involviert; daher hat $P(z)\bar{Q}(z)=0$ und somit auch $P(z)Q(z)=0$ μ Wurzeln in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n}\right)$, von denen mindestens 1 in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+1}\right)$, mindestens 2 in $K\left(0, 1; \frac{\pi}{m+n-\mu+2}\right), \ldots$ liegt, wie behauptet wurde. Damit ist die für das Verschwinden von $\mu-1$ Momenten richtig vorausgesetzte Aussage auch für das Verschwinden von μ Momenten als richtig erwiesen.

Die dem Satze IV. entsprechende Verallgemeinerung des Satzes III. für beliebige a und b (auch in ihrer verschärften Form) kann der Leser leicht selbst finden.

Jerusalem, 31. März, 1929. Mathematisches Institut der hebräischen Universität.

(*Eingegangen am 10. April 1929.*)