Bemerkung zur Algebra.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Die folgenden Zeilen enthalten eine einfache Beweisanordnung für die LOEWYschen Reziprozitätssätze, welche in seiner Arbeit: Über die Reduktion algebraischer Gleichungen durch Adjunktion insbesondere reeller Radikale[1]) gegeben sind.

Seitdem ist eine wichtige Arbeit von T. TAKAGI[2]) erschienen, welche den zweiten Reziprozitätssatz vertieft. Die Beweisführung des TAKAGIschen Satzes wendet den ABELschen Fundamentalsatz an, die LOEWYschen Sätze sind von diesem unabhängig.

1. Es seien im Rationalitätsbereiche P zwei irreduzible Gleichungen:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_a)$$
$$\varphi(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_b)$$

gegeben. Zwei beliebige der Wurzeln α_i, β_j sollen durch α, β bezeichnet werden, ferner zerfalle im Bereiche (P, β) das Polynom $f(x)$ in irreduzible Faktoren, wie folgt

$$f(x) = f_1(x;\beta)\ldots f_k(x;\beta). \tag{1}$$

2. Wir beweisen, dass im Rationalitätsbereiche (P, α) das Polynom $\varphi(x)$ in das Produkt von k irreduziblen Faktoren zerfällt, also ist

$$\varphi(x) = \varphi_1(\alpha; x)\ldots\varphi_k(\alpha; x). \tag{2}$$

Da $\prod_{j=1}^{b} f_l(x;\beta_j)$ eine Potenz von $f(x)$ bildet, besitzt jede Gleichung

$$f_l(\alpha; x) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, k)$$

[1]) *Math. Zeitschrift*, **15** (1922), S. 261—273. Vgl. noch Fr. K. SCHMIDT, Verallgemeinerung eines von Herrn A. LOEWY stammenden Reziprozitätssatzes für algebraische Gleichungen, *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, 1925, 5. Abh., S. 19—26.

[2]) On the mutual reduction of algebraic equations, *Proceedings of the Imperial Academy* (of Japan), **2** (1926), S. 41—42.

eine gemeinsame Wurzel mit der Gleichung $\varphi(x)=0$. Sei der grösste gemeinsame Teiler

$$(f_l(\alpha\,;x),\ \varphi(x))=\psi_l(\alpha\,;x) \qquad (l=1,2,\ldots,k).$$

Die grössten gemeinsamen Teiler sind relativ prim gegen einander, denn im Falle $l \neq k$ kann nicht

$$f_l(\alpha\,;\beta_\mu)=f_k(\alpha\,;\beta_\mu)=0$$

ausfallen, da

$$f(x)=f_1(x\,;\beta_\mu)\ldots f_k(x\,;\beta_\mu)$$

ist. Infolgedessen ist die Anzahl der irreduziblen Faktoren von $\varphi(x)$ nicht kleiner als k. Da f und φ beim Beweise vertauschbar sind, ergibt sich die Anzahl gleich k. Die Bezeichnung kann so gewählt werden, dass

$$\psi_l(\alpha\,;x)=\varphi_l(\alpha\,;x)$$

ausfällt.

3. Man kann zeigen, dass

$$(\varphi_l(x\,;\beta),\ f(x))=f_l(x\,;\beta)$$

ist. Denn es sei z. B. $\varphi_l(\alpha\,;\beta_j)=0$, dann folgt $f_l(\alpha\,;\beta_j)=0$, also ist $f_l(x\,;\beta_j)$ teilbar durch $(\varphi_l(x\,;\beta_j),\ f(x))$. Da $f_l(x\,;\beta_j)$ irreduzibel in (P,β_j) ist und $(\varphi_l(x\,;\beta_j), f(x))$ mindestens vom ersten Grade ist, wird

$$(\varphi_l(x\,;\beta_j), f(x))=f_l(x\,;\beta_j),$$
$$(\varphi_l(x\,;\beta),\ f(x))=f_l(x\,;\beta).$$

4. Sind die Grade der irreduziblen Faktoren in (1) und (2)

(3) $$a_1, a_2, \ldots, a_k\,; \qquad b_1, b_2, \ldots, b_k,$$

so bestehen die Relationen

(3*) $$\frac{a_l}{b_l}=\frac{a}{b} \qquad (l=1,2,\ldots,k).$$

Zu diesem Zwecke muss nur die Gleichung

(4) $$f(x)^{b_l}=f_l(x\,;\beta_1)\ldots f_l(x\,;\beta_b)$$

bewiesen werden. Dies is aber richtig, weil z. B. α_i als Wurzel der Gleichung $f(x)^{b_l}=0$ die Multiplizität b_l besitzt und genau dieselbe Multiplizität weist α_i als Wurzel der Gleichung

$$f_l(x\,;\beta_1)\ldots f_l(x\,;\beta_b)=0$$

auf, q. e. d.

(*Eingegangen am 21. April 1929.*)