Über einen topologischen Satz.

Von JULIUS v. Sz. NAGY in Szeged.

1. Es sei C eine orientierte geschlossene Kurve auf einer Fläche. Die Kurve C scheidet sich in n Doppelpunkten, sie kann aber noch Doppelpunkte und andere mehrfache Punkte haben.

Die Kurve C lässt sich in einem ihrer n Doppelpunkte auf zweierlei Art aufscheiden, je nachdem sie orientiert bleibt oder nicht. Das Aufschneiden des Doppelpunktes, oder der *Aufschnitt* des Doppelpunktes wird im ersten Falle *Durchschnitt*, im zweiten aber *Querschnitt* genannt. Die zwei Aufschnitte in einem Doppelpunkte werden *komplementäre Aufschnitte* genannt.

Es ist klar, dass die Kurve C durch den Durchschnitt eines ihrer Doppelpunkte in zwei Kurven zerfällt. Die Kurve C bleibt aber eine Kurve nach dem Querschnitte eines ihrer Doppelpunkte.

Wir werden den folgenden Satz beweisen:

I. *Ist k bzw. h die Anzahl der Kurven, in welche die Kurve C durch gewisse Aufschnitte ihrer n Doppelpunkte bzw. durch die komplementären dieser Aufschnitte zerteilt wird, so besteht die Gleichung*

$$k+h=n+2-2r,$$

wo r eine nichtnegative ganze Zahl ist.

2. Zerfällt die Kurve C durch gewisse Aufschnitte der n Doppelpunkte in k geschlossene Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$ und wendet man in einem der n Doppelpunkte, wo zwei der Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$ durch den angenommenen Aufschnitt von einander getrennt wurden, den komplementären Aufschnitt an, so werden die betreffenden zwei Kurven dadurch in eine Kurve vereinigt. Setzt man dieses Verfahren für die so erhaltenen $k-1$ Kurven fort, so erhält man durch die komplementären der entsprechenden $k-1$ Aufschnitte und durch die übrigen $n-k+1$ Aufschnitte aus der Kurve C eine einzige Kurve C'.

Einer der entsprechenden $n-k+1$ komplementären Aufschnitte vermehrt oder verkleinert die Anzahl der Kurven, je nachdem er zwei Punkte einer Kurve oder je einen Punkt von zwei Kurven verbindet.

Ist q bzw. r die Anzahl derjenigen der $n-k+1$ komplementären Aufschnitte, von denen die Anzahl der Kurven vergrössert oder verkleinert wird, so bestehen die Gleichungen:

$$q+r=n-k+1 \text{ und } h=1+q-r.$$

Aus diesen Gleichungen folgen die Gleichungen

$$k+h=n+2-2r \text{ und } h-k=2q-n.$$

Damit ist der Satz I bewiesen.

3. Hat die Kurve C ausserhalb ihrer n Doppelpunkte keine mehrfachen Punkte, so bildet sie mit ihren n Doppelpunkten einen aus $2n$ Strecken bestehenden regulären Streckenkomplex, weil von jedem Punkte des Komplexes (von den Doppelpunkten von C) vier Strecken ausgehen.

Wir verstehen unter den *Zykeln* dieser orientierten Kurve die orientierten einfachen Kurven, in welche die Kurve C durch die Durchschnitte ihrer Doppelpunkte zerlegt werden kann. Die einfachen Kurven (ohne Doppelpunkte), in welche die Kurve C durch die Querschnitte ihrer Doppelpunkte zerlegt werden kann, werden *Antizykel* genannt.

Die Orientierung auf je zwei aufeinanderfolgenden Strecken eines Antizykels ist verschieden. Daraus folgt, dass jeder Antizykel aus einer geraden Anzahl der Strecken der Kurve C gebildet wird.

Aus dem Satze I. folgt der Satz:

II. *Ist z bzw. a die Anzahl der Zykel bzw. Antizykel einer Kurve C, die ausserhalb n Doppelpunkte keine weiteren mehrfachen Punkte hat, so besteht die Gleichung*

$$z+a=n+2-2r,$$

wo r eine nichtnegative ganze Zahl ist.

(*Eingegangen am 14. Mai 1929.*)