Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie.

Von László Kalmár in Szeged.

1. Unter dem Entscheidungsproblem (erster Stufe) der mathematischen Logik versteht man Folgendes: Es ist ein Verfahren anzugeben, welches ermöglicht, von einem beliebigen Zählausdruck zu entscheiden, ob es einen Individuenbereich gibt, wo derselbe erfüllbar ist. Dabei versteht man nach Löwenheim[1]) unter einem Zählausdruck einen aus veränderlichen logischen Funktionen[2]) mit Hilfe logischer Operatoren[3]) und (sich ausschliesslich auf Individuenvariable beziehenden) Quantifikatoren[4]) zusammengesetzten

---

[1]) L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen*, **76** (1915), S. 447–470.

[2]) d. h. in einer beliebigen Menge $\mathfrak{J}$ (Individuenbereich) definierten Funktionen (von einer oder mehreren Veränderlichen), welche zwei bestimmte Werte anzunehmen fähig sind. Diese beiden Werte, welche man logische Werte („wahr" und „falsch") nennt, bezeichne ich (statt den Behmannschen, γ und λ ähnlichen Zeichen aus drucktechnischen Gründen) mit $\uparrow$ bzw. $\downarrow$.

[3]) d. h. Funktionen (beliebig vieler Veränderlichen), deren Argumente und Funktionswerte logische Werte sind. Beispiele: die Negation $(\overline{p})$, die Konjuktion $(p \& q)$ und die Implikation $(p \rightarrow q)$, welche üblicherweise durch ihre „Einmaleinstabellen":

$$\overline{\uparrow} = \downarrow, \quad \overline{\downarrow} = \uparrow;$$
$$\uparrow \& \uparrow = \uparrow, \quad \uparrow \& \downarrow = \downarrow, \quad \downarrow \& \uparrow = \downarrow, \quad \downarrow \& \downarrow = \downarrow;$$
$$\uparrow \rightarrow \uparrow = \uparrow, \quad \uparrow \rightarrow \downarrow = \downarrow, \quad \downarrow \rightarrow \uparrow = \uparrow, \quad \downarrow \rightarrow \downarrow = \uparrow$$

definiert werden. Von der bekannten Tatsache, dass sich jeder logische Operator mit Hilfe von $^{-}$ und $\&$ (oder aber mit Hilfe von $^{-}$ und $\rightarrow$) ausdrücken lässt, mache ich keinen Gebrauch. — Betreffend der hier angewandten Auffassung des „Aussagenkalküls" als Arithmetik einer Menge $\{\uparrow, \downarrow\}$ mit zwei Elementen vgl. J. Lukasiewicz, Über den Aussagenkalkül, erscheint in den *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna.*

[4]) Die Quantifikatoren, (x) („für alle x") und (Ex) („es gibt ein x, für welche"), erzeugen aus einer (eventuell auch von anderen Parametern als x abhängigen) logischen Funktion $F(x)$ einen von x unabhängigen logischen

Ausdruck, der keine freie (d. h. nichtgebundene) Individuenvariable enthält, also einen nur vom Individuenbereich und von der Wahl der veränderlichen Funktionen abhängigen logischen Wert repräsentiert. Ein Zählausdruck $\mathfrak{A}$ heisst in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ erfüllbar, wenn es in $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktionen gibt, welche in $\mathfrak{A}$ für die entsprechenden Funktionsvariablen eingesetzt, die Gleichung $\mathfrak{A} = \uparrow$ erfüllen.

2. Das Entscheidungsproblem, in obiger Fassung, enthält als Spezialfall die Frage nach der Widerspruchsfreiheit eines beliebigen Axiomensystems, also auch die Frage nach der Beweisbarkeit eines beliebigen Satzes in irgendeinem Axiomensystem. Man bezeichnet aber häufig auch ein allgemeineres Problem als Entscheidungsproblem, welches sich vom obigen dadurch unterscheidet, dass in den Zählausdrücken auch ein Funktionszeichen $I(x, y)$ vorkommen kann, welches keine variable Funktion bezeichnet, sondern die konstante „Identitätsfunktion", welche $= \uparrow$ oder $\downarrow$ ist, je nachdem x und y dieselben Elemente von $\mathfrak{J}$ sind oder nicht.

In dieser weiteren Fassung wird das Entscheidungsproblem in der oben angeführten Arbeit von Löwenheim behandelt. Unter anderen wichtigen Beiträgen zur Lösung des Entscheidungsproblems wird dortselbst gezeigt, dass es genügen würde, das Entscheidungsproblem für binäre Zählausdrücke zu lösen, d. h. für solche, in denen keine logischen Funktionen von mehr als zwei Argumenten vorkommen. Löwenheim konstruiert nämlich zu jedem Zählausdruck $\mathfrak{A}$ einen binären $\mathfrak{B}$ von der Beschaffenheit, dass $\mathfrak{A}$ dann und nur dann in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ erfüllbar ist, wenn $\mathfrak{B}$ in einem gewissen anderen Individuenbereich $\mathfrak{K}$ es ist. Nun kommt aber in $\mathfrak{B}$ die konstante Identitätsfunktion $I(x, y)$ vor, selbst auch dann, falls $\mathfrak{A}$ — wie im Folgenden vorausgesetzt wird — dieselbe ursprünglich nicht enthalten hat.

3. Um nun die Löwenheimsche Reduktion des Entscheidungsproblems auf den Fall binärer Zählausdrücken auch bei der engeren, für die Anwendungen auf axiomatische Fragen wichtigeren Fassung desselben zu ermöglichen, werde ich nun zeigen, dass zu jedem binären Zählausdruck $\mathfrak{B}$ ein ebenfalls binärer Zählaus-

Wert: es ist nämlich $(x)F(x) = \uparrow$ oder $\downarrow$, je nachdem $F(x)$ für x in $\mathfrak{J}$ konstant $= \uparrow$ ist oder nicht, ferner $(Ex)F(x) = \downarrow$ oder $\uparrow$, je nachdem $F(x)$ für x in $\mathfrak{J}$ konstant $= \downarrow$ ist oder nicht. Die in $F(x)$ figurierende Individuenvariable x wird also durch die Quantifikatoren (x) bzw. (Ex) „gebunden".

druck $\mathfrak{E}$ konstruiert werden kann derart, dass in $\mathfrak{E}$ die konstante Identitätsfunktion nicht vorkommt, ferner, dass falls $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{K}$ erfüllbar ist, so ist es auch $\mathfrak{E}$ in einem gewissen Individuenbereich $\mathfrak{L}$ und umgekehrt.

Zu diesem Zweck fasse ich das Zeichen $I(x, y)$ in $\mathfrak{B}$ ebenfalls als eine Funktionsvariable auf; ferner bilde ich zu jeder in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Funktion eines Argumentes $F(x)$ bzw. zweier Argumenten $F(x, y)$ (auch $I(x, y)$ mitgerechnet) den Zählausdruck

$$(1) \qquad (x)(y)((I(x, y) \,\&\, F(x)) \rightarrow F(y))$$

bzw. die beiden Zählausdrücke

$$(2) \qquad (x)(y)(z)((I(x, y) \,\&\, F(x, z)) \rightarrow F(y, z)),$$

$$(3) \qquad (x)(y)(z)((I(x, y) \,\&\, F(z, x)) \rightarrow F(z, y)).$$

Die Konjunktion aller dieser Ausdrücken bezeichne ich mit $\mathfrak{C}$, den Zählausdruck

$$(x)\, I(x, x)$$

mit $\mathfrak{D}$; endlich sei

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{D}.$$

Ist nun $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{K}$ in dem Sinne erfüllbar, dass statt I die Identitätsfunktion eingesetzt wird, so ist auch $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{K}$ erfüllbar, nämlich durch dieselbe Einsetzungen der Funktionsvariablen; es haben ja $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, wenn statt I die Identitätsfunktion eingesetzt wird, den Wert $\dagger$. Ist umgekehrt $\mathfrak{E}$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{L}$ erfüllbar, hat also $\mathfrak{E}$ bei einer bestimmten Einsetzung der Funktionsvariablen den Wert $\dagger$, so zerfällt $\mathfrak{L}$ — da

$$(x)\, I(x, x)$$

und

$$(x)(y)(z)\ ((I(x, y) \,\&\, I(x, z)) \rightarrow I(y, z))$$

als Konjunktionsglieder von $\mathfrak{E}$, den Wert $\dagger$ haben — in Klassen derart, dass zwei Elemente x und y von $\mathfrak{L}$ dann und nur dann zur selben Klasse gehören, wenn $I(x, y) = \dagger$ ist. Ist nun $F(x)$ bzw. $F(x, y)$ eine in $\mathfrak{E}$ vorkommende Funktion, so haben (1) bzw. (2) und (3), als Konjunktionsglieder von $\mathfrak{E}$, den Wert $\dagger$; daher hängt der Wert von $F(x)$ bzw. $F(x, y)$ nur von der Klasse α bzw. von den Klassen α und β ab, denen x bzw. x und y angehören. Bezeichnet man diesen Wert mit $F(\alpha)$ bzw. $F(\alpha, \beta)$, so hat man im Bereich $\mathfrak{K}$ der Klassen Funktionen definiert, welche die Gleichung $\mathfrak{E} = \dagger$ erfüllen, wobei $\mathfrak{K}$ als Individuenbereich zu betrachten ist. Da $\mathfrak{B}$ ein Konjunktionsglied von $\mathfrak{C}$ ist, erfüllen diese Funktionen auch die Gleichung $\mathfrak{B} = \mathfrak{t}$; und zwar ist $I(\alpha, \beta)$ eben die Identitätsfunktion in $\mathfrak{K}$.

4. Eine Verschärfung des Entscheidungsproblems ist Folgendes[5]): Es ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, dass ein Zählausdruck $\mathfrak{A}$ in einem Individuenbereich erfüllbar sei. Kommt in $\mathfrak{A}$ die Identitätsfunktion nicht vor, so kommt dies, wie es Bernays und Schönfinkel (a. a. O, S. 344 f.) gezeigt haben, darauf hinaus, die minimale Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ derjenigen Individuenbereiche $\mathfrak{J}$ zu bestimmen, in denen $\mathfrak{A}$ erfüllbar ist (wenn es solche $\mathfrak{J}$ überhaupt gibt): dann ist $\mathfrak{A}$ in einem Individuenbereich dann und nur dann erfüllbar, wenn seine Mächtigkeit $\geqq \mathfrak{m}$ ist. Kommt aber in $\mathfrak{A}$ auch die Identitätsfunktion vor, so ist dieser Satz im allgemeinen ungültig, so dass zur Lösung des verschärften Entscheidungsproblems die Bestimmung der erwähnten Minimalmächtigkeit nicht mehr genügt. Z. B. ist der Zählausdruck

$$(Ex)(y)\ I(x, y),$$

wo I die Identitätsfunktion bezeichnet, erfüllbar in $\mathfrak{J}$, wenn dieser Individuenbereich genau ein Element besitzt, sonst aber nicht.

Trotzdem ist für die Anwendung auf die Löwenheimsche Reduktion die Bemerkung vom Nutzen, dass die zu den Zählausdrücken $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gehörigen Minimalmächtigkeiten gleich sind. In der Tat, ist $\mathfrak{L}$ der Individuenbereich von der Minimalmächtigkeit $\mathfrak{m}$, wo $\mathfrak{C}$ erfüllbar ist, so ist nach dem Vorangehenden auch $\mathfrak{B}$ in keinem Individuenbereich von kleinerer Mächtigkeit erfüllbar, wohl aber im oben konstruierten $\mathfrak{K}$, dessen Mächtigkeit $\leqq \mathfrak{m}$ ist.

Beachtet man nun, dass bei der Löwenheimschen Reduktion die Mächtigkeiten von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ monoton nichtabnehmend voneinander abhängen, so hat man zur Lösung des verschärften Entscheidungsproblems die zu $\mathfrak{B}$ gehörige Minimalmächtigkeit zu bestimmen, was mit Rücksicht auf die vorangehende Bemerkung soeben auf das entsprechende Problem über binäre Zählausdrücke zurückgeführt wurde.

5. Ich deute noch eine geringe Vereinfachung der erwähnten Löwenheimschen Konstruktion des Individuenbereiches $\mathfrak{K}$ an. Es

---

[5]) Vgl. P. Bernays und M. Schönfinkel, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, **99** (1928), S. 342—372., insbesondere S. 344.

sei n die Höchstanzahl der Argumente der in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Funktionsvariablen; man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzten, dass jede in $\mathfrak{A}$ vorkommende Funktionsvariable genau n Argumente besitzt. Löwenheim erreicht nun eine schrittweise Reduktion der Anzahl n durch Einführung der Menge aller geordneten Paare von Elementen des Individuenbereiches als neuen Individuenbereich. Am Ende seiner Arbeit erwähnt er, dass man z. B. im Falle $n=6$ analog auch mit Triaden von Elementen des Individuenbereiches operieren kann. Nun hindert es nichts, $\mathfrak{K}$ als Menge der geordneten n-aden aus Elementen von $\mathfrak{J}$ zu definieren, wodurch die Reduktion in einem Schritte erreicht wird; zugleich erspart man Diskussionen der Fälle in Bezug auf die Gleichheit von Argumenten einer Funktion Aus den in $\mathfrak{A}$ ursprünglich vorkommenden veränderlichen Funktionen werden in $\mathfrak{B}$ lauter Funktionen eines Argumentes; die in $\mathfrak{B}$ vorkommenden Funktionen zweier Argumenten sind die Identitätsfunktion, sowie die n, den Löwenheimschen V und H analogen Hilfsfunktionen.

(*Eingegangen am 4. Oktober 1929.*)