Bibliographie.

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, dritter Band, 3. Auflage (Grundlehren der math. Wissenschaften XVI), X + 238 S., Berlin, J. Springer, 1928.

Das vorliegende dritte Band von KLEIN's Elementarmathematik enthält die erste Vorlesung, die er über diesen Gegenstand gehalten hat. Während in den beiden ersten Bänden (vgl. die Besprechungen in Band 2., S. 127 und 257. *dieser Acta*) diejenige Teile der Mathematik, mit denen man gewöhnlich rechnet — Arithmetik, Algebra, Analysis, Mengenlehre, Geometrie — behandelt wurden, so wird man in diesem Band in ein Gebiet eingeführt, das sonst nur selten zur Darstellung kommt. Der grundlegende Gedanke KLEIN's, „die mathematische Wissenschaft als ein zusammengehöriges Ganzes nach allen Seiten wieder zur Geltung zu bringen,... insbesondere aber zu erreichen, dass zwischen den Vertretern der abstrakten und der angewandten Mathematik wieder mehr gegenseitiges Verständnis Platz greife, als augenblicklich besteht", kommt hier zur Ausführung.

Im ersten Teil, der von der geometrischen Darstellung reeller Funktionen handelt, wird der Leser mit der unbestreitbaren Tatsache vertraulich gemacht, dass es zwei verschiedene Arten von Mathematik gibt, eine abstrake „Präzisionsmathematik" und eine praktische „Approximationsmathematik". Die Beherrschung der Approximationsmathematik mit Hilfe der Präzisionsmathematik und die Verwendung der Approximationsmathematik zur Beschreibung der Präzisionsmathematik bilden dann den eigentlichen Gegenstand des Buches. Im zweiten Teil wird von diesem Gesichtspunkte aus die Geometrie der ebenen Kurven behandelt. Ein dritter Teil handelt von der Versinnlichung idealer Gebilde durch Zeichnungen und Modelle.

Es ist zu erwarten, dass diese bisher nur in Autographie vorhandenen Vorlesungen KLEIN's, die seine grundlegenden Gedanken so klar ausdrücken, von nun an dieselbe Verbreitung wie die beiden ersten Bände finden werden.

Börge Jessen.

G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 4. Auflage, V + 417 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928.

Die wesentliche Abweichung dieser vierten Auflage des wohlbekannten Lehrbuches von den Vorhergehenden besteht in einem elfseitigen Anhange über FREDHOLMsche Determinanten und Integralgleichungen. Trotz der musterhaften Darstellung ist es leider zu befürchten, dass der Leser, der noch nichts über Differentialgleichungen, unendliche Determinanten und andere angrenzende Problemkreise gehört hat, die Tiefe der FREDHOLMschen Ideen nicht nach ihrem wahren Werte einschätzen wird.

F. R.

L. Bieberbach, Vorlesungen über Algebra, unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von G. BAUER in vierter vermehrter Auflage dargestellt, X + 334 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928.

Dieses moderne Lehrbuch der elementaren Algebra ist unter Benutzung der dritten Auflage des Werkes von G. BAUER entstanden. Im Mittelpunkt der Darstellung stehen die algebraischen Gleichungen. Das Buch beginnt mit Entwicklungen über die grundlegenden Eigenschaften der algebraischen Gleichungen. Entsprechend der Tendenz des Verfassers wird unter Anderen der Fundamentalsatz der Algebra auch mit Hilfe des ROUCHÉschen Satzes (also funktionentheoretisch) bewiesen. Die axiomatisch einsetzende Behandlung der Determinanten dürfte den Anfängern Schwierigkeiten verursachen. Die quadratischen Formen werden sehr ausgiebig behandelt. Der Abschnitt über numerische Auflösung der Gleichungen enthält auch einige der neueren Ergebnissen der numerischen Algebra, z. B. das Verfahren zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen einer Gleichung in einem Kreise. Im Kapitel „Sätze über die Lage der Gleichungswurzeln" hätten vielleicht auch die bezüglichen Sätze von CAUCHY, BIRKHOFF, FEKETE, ... Platz finden können. Es sei noch erwähnt, dass — wie in der Einleitung bemerkt — die Substitutionsgruppen und die GALOISsche Theorie in Anschluss an PERRON dargelegt sind.

Das Buch trägt die persönliche Marke von BIEBERBACH; der Leser erkennt, wie ein Funktionentheoretiker die Algebra behandelt. An einigen Stellen stehen interessante historische und literarische Hinweise. Die lebhafte, leicht fliessende und meisterhafte Darstellung gibt dem Buch einen besonders hohen Wert.

St. Lipka.

Otto Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, zweite Auflage, V + 73 S., Berlin, J. Springer, 1929.

Der Verfasser lehnt sowohl die formalistische Begründung der Arithmetik, als „überflüssig und im Grunde widerspruchsvoll", wie auch den intuitionistischen Standpunkt, deren „einzige . . . Wirkung ist die, dass Nichtmathematiker nunmehr glauben, mit Behagen darauf hinweisen zu dürfen, dass auch unsere, früher für vollständig strenge gehaltene Wissenschaft in die Luft gesprengt worden sei", ab. Er fasst die Mathematik inhaltlich auf, doch ohne die Basis der klassischen Logik zu verlassen: dies ist eben die Auffassung der meisten Mathematiker. Er zeigt, dass eine strenge Begründung der Arithmetik auch bei dieser Einstellung nötig und möglich ist.

In den elementaren Teilen der Arithmetik (d. h. mit Ausnahme der

Theorie der Irrationalzahlen), wo auch schon die Behandlungsweise des Intuitionismus und die des Formalismus weitgehend analog verlaufen, ist auch die hier gegebene Darstellung denselben ähnlich. Die Theorie der Irrationalzahlen wird üblicherweise mit Hilfe DEDEKINDscher Schnitten entwickelt.

Grosses Gewicht wird auf die richtige Anordnung des Stoffes gelegt, wodurch ein hoher Grad von Eleganz erreicht wird. Es ist ja bekannt, dass in diesem Gebiet eine scheinbar unwesentliche Abänderung einer Definition oder der Reihenfolge der zu beweisenden Sätze zu unbequemen Weitschweifigkeiten führen kann. Besonders elegant ist die Theorie der negativen Zahlen behandelt.

Das Buch ist sehr lehrreich für jeden, der erfahren will, worauf eigentlich *die Wissenschaft des Zweimalzwei* beruht, *ohne dabei* auf schwierige Prinzipienfragen einzugehen.

L. Kalmár.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, zweiter Band, VII + 360 S., Berlin, J. Springer, 1929.

Der vorliegende abschliessende Band der COURANTschen Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung ist der Lehre von den Funktionen mehreren Veränderlichen gewidmet. Wie im ersten Bande, so wird auch hier jede neue mathematische Tatsache und Begriffsbildung zunächst geometrisch oder mechanisch plausibel gemacht und erläutert und dann möglichst anschaulich bewiesen. Beispiele folgen überall und gehen an manchen Stellen sogar den Beweisen voran. Präzisionsmathematische Überlegungen und allzu abstrakte Begriffe werden öfters und mit Recht in die Anhänge am Ende der einzelnen Kapitel verwiesen. Analogien mit dem eindimensionalen Falle und die Unterscheide von demselben werden stets sorgfältig besprochen und die Gründe der letzteren aufgedeckt.

Der Stoff wird in sechs Kapiteln untergebracht. Im ersten Kapitel sind die im weiteren Verlaufe der Darstellung benötigten einfachsten Tatsachen aus der analytischen Geometrie, Determinantentheorie, Vektorrechnung zusammengestellt; insbesondere dürften die hier gegebenen Entwickelungen über affine Abbildungen das Verständnis der allgemeinen Sätze der weiteren Kapitel wesentlich fördern. Das zweite Kapitel handelt von Stetigkeit und Differenzierbarkeit, und enthält unter anderem eine sehr saubere, an den Begriff der totalen Differenzierbarkeit anknüpfende Begründung des so ungemein praktischen Rechnens mit Differentialen. Gelegentlich der Einführung der partiellen Ableitungen wäre vielleicht eine Bemerkung von folgendem Charakter am Platze. Bedeuten x, y rechtwinklige, ϱ und φ aber Polarkoordinaten, so kann eine Funktion f aufgefasst werden als Funktion von φ und ϱ, aber auch als Funktion von φ und x oder von φ und y; das Symbol $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ hat dann, entsprechend der Wahl der zweiten unabhängigen Veränderlichen, ebensoviele ganz verschiedene Bedeutungen. Der Student pflegt über diesen Punkt zwar nicht im Allgemeinen, aber bei der Ausrechnung konkreter Transformationsformeln fast immer sehr unsicher zu sein — man könnte ihm da eine kleine Erläuterung gönnen. Das dritte Kapitel enthält die Theorie der impliziten Funktionen, der Einhüllenden von Kurven- und Flächenscharen, der Maxima und Minima, und im Anhange verschiedenes über die singulären Punkte ebener Kurven. Im vierten Kapitel werden die mehrdimensionalen bestimmten Integrale, sowohl die eigentlichen wie auch die uneigentlichen, eingeführt und die Transformationstheorie derselben entwickelt; dies alles wird dann auf die Berechnung von Volumen, Oberfläche, sowie von Momenten und Potentialen angewendet. Im Anhange wird der Leser auch über die Tücken des Begriffes des Flächeninhaltes einer krummen Fläche orientiert. Das fünfte Kapitel darf wohl als die beste überhaupt vorhandene Einführung in die Theorie der Reduktion der Dimensionenzahl mehrfacher Integrale (Sätze von GAUSS, GREEN, STOKES) betrachtet werden. Im sechsten Kapitel findet der Leser Ausführungen, die ihn befähigen sollen sich im Laufe seiner weiteren Studien in den ausführlichen Darstellungen den Differentialgleichungen, Potentialtheorie, Mechanik gleich zu Beginn zurechtzufinden. Der Band schliesst mit einem Verzeichnis der wichtigsten Formeln und Säzte für beide Bände.

Die paar Monate seit dem Erscheinen dieses abschliessenden Bandes haben bereits genügt, um dem COURANTschen Werke den Ruf einer ausgezeichnet gelungenen Darstellung eines sonst heiklen Gegenstandes zu verschaffen. Gute Lehrbücher sind eben ziemlich selten und wenn von Zeit zu Zeit ein solches herauskommt, so merken es sofort Alle, die den Stoff lehren oder lernen müssen, mit Freude.

Tibor Radó.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil II. (Teubners mathematische Leitfäden 22), VIII + 202 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

Der vorliegende zweite Teil dieses ausgezeichneten Werkes ist in vier Hauptabschnitten gegliedert, die der Reihe nach der Integralrechnung, den unendlichen Reihen (insbesondere den Potenzreihen), den von einem Parameter abhängigen Integralen (Linienintegralen und Integralen im Komplexen), endlich den Determinanten und der Vektorrechnung gewidmet sind.

Die durch 96 Figuren illustrierte Darstellung ist durchwegs knapp, aber äusserst verständlich gehalten. Eine reiche Sammlung von Übungsaufgaben erleichtert das Studium des Buches. Die Klarheit und Gründlichkeit der Darlegung sowie die knappe, stets elegante Darstellung macht das Buch für jeden Studierenden der Mathematik und Technik besonders empfehlungswert.

Nagy.