Über die gleichmässige Verteilung nichtganzer positiver Potenzen mod 1.

Von PAUL CSILLAG in Budapest.

Wir bezeichnen mit a und p reelle und positive Zahlen, mit n eine natürliche Zahl und beweisen in Anschluss an eine frühere Arbeit[1]) mit Hilfe einer schönen Methode von WEYL,[2]) dass die Zahlenfolge

$$q_n = q_n(a, p) = \text{gebrochener Teil von } an^p$$

bei beliebigem reellem und positivem a und nichtganzem p das Intervall $(0, 1)$ gleichmässig dicht ausfüllt.

Für $p < 1$ ist dies ein Resultat von FEJÉR.[3]) Seine mündlich gestellte Frage beantwortend beweisen wir, dass der Fall $p > 1$ auf den Fall $p < 1$ zurückführbar ist. Das Wesentliche dieser Möglichkeit sehen wir in der Tatsache, dass die Folge $Q_n = an^p$ sich für grosse n wie ein Polynom verhält.

1. Von einer reellen Zahlenfolge Q_ν sagen wir, dass sie das Intervall $(0, 1)$ mod 1 gleichmässig ausfüllt, wenn für beliebige reelle β, γ mit $0 \leqq \beta < \gamma \leqq 1$

$$\lim_{n=\infty} \frac{N_n(\beta, \gamma)}{n} = \gamma - \beta \tag{1. 1}$$

ist, wo $N_n(\beta, \gamma)$ die Anzahl der ν bedeutet, für welche

$$\beta \leqq \text{gebrochener Teil von } Q_\nu \leqq \gamma, \qquad \nu \leqq n$$

ist.

---

1) Über die Verteilung iterierter Summen von positiven Nullfolgen mod 1, *diese Acta*, **4** (1929), S. 151—154.

2) H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Annalen*, **77** (1916), S. 313—352.

3) G. PÓLYA und G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Berlin 1925), S. 72., Aufgabe 175.

Wir benützen nach Hardy und Littlewood die Bezeichnung

$$e(x) = e^{2\pi i x}.$$

Nach einem berühmten Satze von Weyl[2]) ist für das Bestehen der Gleichung (1. 1) notwendig und hinreichend, dass für jedes positive ganze l

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{\nu=1}^{n} e(l\,Q_\nu) \right] = 0 \tag{1.2}$$

ist.

Mit anderen Worten: für die gleichmässig dichte Lage der Folge Q_ν mod 1 ist (1. 2) notwendig und hinreichend. Hieraus folgt sofort das

Lemma. *Wenn die Folge Q_ν mod 1 gleichmässig liegt, so liegt auch die Folge $2Q_\nu$ oder allgemeiner die Folge lQ_ν mod 1 gleichmässig dicht, wo l eine beliebige positive oder negative ganze Zahl $\neq 0$ bedeutet.*

Sei $P_k(\nu)$ ein Polynom vom Grade k in ν und sei α der Koeffizient von ν^k in $P_k(\nu)$; dann ist nach Weyl, $2^{k-1} = K$ gesetzt,

$$\left| \sum_{\nu=1}^{h} e(P_k(\nu)) \right|^K \leqq (2h)^{K-k} \sum_{r_1} \sum_{r_2} \dots \sum_{r_{h-1}} \left| \sum_{\lambda} e(k!\,R\alpha\lambda) \right|, \tag{1.3}$$

wo rechter Hand $r_1, r_2, \dots, r_{h-1}$ ganze Zahlen und $R = r_1 r_2 \dots r_{h-1}$ bezeichnen, und wo die Summation auf alle ganze $|r_i| \leqq h-1$ und auf eine Folge konsekutiver positiver ganzer Zahlen $\lambda \leqq h$ zu erstrecken ist.

2. Satz. *Wir bezeichnen mit s_ν eine Folge reeller Zahlen für welche erstens*

$$\lim_{n=\infty} (s_{n-1} - s_n) = 0 \tag{2.1}$$

zweitens für jede positive ganze Zahl l

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} e(ls_\nu) = 0 \tag{2.2}$$

gilt.

Wir setzen

$$\begin{aligned} s_n^{(1)} &= s_1 + s_2 + \dots + s_n \\ s_n^{(2)} &= s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \dots + s_n^{(2)} \\ &\vdots \\ s_n^{(k)} &= s_1^{(k-1)} + s_2^{(k-1)} + \dots + s_n^{(k-1)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

und behaupten: für ein beliebiges festes k und für eine beliebige *positive oder negative feste ganze Zahl $l \neq 0$ folgt unter diesen Annahmen*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} e(l s_\nu^{(k)}) = 0. \tag{2.4}$$

Kurz: aus der Voraussetzung (2. 1) und aus der gleichmässig dichten Lage mod 1 von s_ν folgt die gleichmässig dichte Lage mod 1 von $s_\nu^{(k)}$.

Zum Beweise können wir $l=1$ setzen, da nach dem Lemma des § **1.** mit den s_ν auch die ls_ν mod 1 gleichmässig dicht liegen und aus der Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} e(s_\nu^{(k)})}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{T_n^{(k)}}{n} = 0 \tag{2.5}$$

durch Vertauschung von s_ν mit ls_ν die Gleichung (2. 4) folgt.

Wir wählen jetzt eine (grosse) positive ganze Zahl h und eine (kleine) positive Zahl $\varepsilon < \frac{1}{4}$, ferner eine positive ganze Zahl $N = N(h, \varepsilon)$ so, dass für $n > N$

$$|s_{n+1} - s_n| < \frac{\varepsilon}{h^{k+2}} \tag{2.6}$$

ist und schreiben

$$T_n^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} e(s_\nu^{(k)}) = \sum_{\nu=1}^{N} + \sum_{N+1}^{N+h} + \sum_{N+h+1}^{N+2h} + \ldots + \sum_{N+mh+1}^{n} =$$

$$= T_N^{(k)} + U_1 + U_2 + \ldots + U_m + U^*; \qquad n-(N+mh) < h.$$

Es ist $|U^*| < h$; folglich ist

$$\limsup_{n=\infty} \left| \frac{T_n^{(k)}}{n} \right| \leq \limsup_{n=\infty} \frac{|U_1| + |U_2| + \ldots + |U_m|}{n}. \tag{2.7}$$

3. Setzen wir

$$s_{\nu+\lambda}^{(k)\prime} = s_{\nu+1}^{(k)} + \binom{\lambda-1}{1} s_{\nu+1}^{(k-1)} + \ldots + \binom{\lambda+k-2}{k} s_{\nu+1}, \tag{3.1}$$

so folgt aus (2. 3) und (3. 1), dass

$$|s_{\nu+\lambda}^{(k)\prime} - s_{\nu+\lambda}^{(k)}| < \binom{\lambda+k-2}{k} \operatorname{Max} \{|s_{\nu+2} - s_{\nu+1}|, \ldots, |s_{\nu+\lambda} - s_{\nu+1}|\}$$

und weiter nach (2. 6), dass

$$|s_{\nu+\lambda}^{(k)\prime} - s_{\nu+\lambda}^{(k)}| \leq \binom{\lambda+k-2}{k} \frac{\lambda\varepsilon}{h^{k+2}} \leq \frac{\varepsilon}{h} \quad \text{für } \nu \geq N,\ \lambda \leq h. \tag{3.2}$$

Aus (2. 3) folgt nämlich für $s_{\nu+\lambda}^{(k)}$ ein dem (3. 1) ähnlich gebauter Ausdruck, wo statt $\binom{\lambda+k-2}{k} s_{\nu+1}$ eine lineare Funktion der Grössen $s_{\nu+2}, \ldots, s_{\nu+\lambda}$ figuriert; die Koeffizienten dieser linearen Funktion sind alle positiv und haben die Summe $\binom{\lambda+k-2}{k}$.

Aus (3. 2) folgern wir weiter

$$|e(s_{\nu+\lambda}^{(k)\prime})-e(s_{\nu+\lambda}^{(k)})|<2\pi|s_{\nu+\lambda}^{(k)\prime}-s_{\nu+\lambda}^{(k)}|<\frac{2\pi\varepsilon}{h},$$

und für $\nu=N+(\mu-1)h$

$$(3.3)\quad |U'_\mu-U_\mu|=\left|\sum_{\lambda=1}^{h}(e(s_{\nu+\lambda}^{(k)\prime})-e(s_{\nu+\lambda}^{(k)}))\right|\leq$$

$$\leq\sum_{\lambda=1}^{h}|e(s_{\nu+\lambda}^{(k)})-e(s_{\nu+\lambda}^{(k)})|\leq\frac{2\pi\varepsilon}{h}h=2\pi\varepsilon.$$

Aus (2. 7) und aus $mh<n$ in Verbindung mit (3. 3) folgt, dass

$$\limsup_{n=\infty}\left|\frac{T_n^{(k)}}{n}\right|\leq\limsup_{n=\infty}\frac{\sum_{\omega=1}^{m}|U'_\omega|}{n}+\limsup_{n=\infty}\frac{\sum_{\omega=1}^{m}|U'_\omega-U_\omega|}{n}\leq$$

$$\leq\limsup_{n=\infty}\frac{\sum_{\omega=1}^{m}|U'_\omega|}{n}+\frac{2\pi\varepsilon}{h},$$

also, da ε beliebig klein angenommen werden kann,

$$(3.4)\qquad \limsup_{n=\infty}\left|\frac{T_n^{(k)}}{n}\right|\leq\limsup_{n=\infty}\frac{\sum_{\omega=1}^{m}|U'_\omega|}{n}.$$

4. Durch forgesetzte Anwendung der CAUCHY—SCHWARZschen Ungleichung gewinnen wir die Ungleichung

$$(4.1)\qquad \left[\sum_{\omega=1}^{m}|U'_\omega|\right]^K\leq m^{K-1}\sum_{\omega=1}^{m}|U'_\omega|^K.$$

Nach (3. 1) ist $s'_{\nu+\lambda}$ ein Polynom k-en Grades in λ und λ_k hat $\frac{s_{\nu+1}}{k!}$ zum Koeffizienten.

Nach (1. 3) ist also

$$(4.2)\quad |U'_\omega|^K\leq(2h)^{K-k}\sum_{r_1}\ldots\sum_{r_{k-1}}\left|\sum_{\lambda}e(R\lambda s_{\nu+1})\right|=$$

$$=(2h)^{K-k}(\Sigma'+\Sigma''+\Sigma'''),$$

wo die Summation für alle $|r_1| \leqq h-1$ und für eine Folge konsekutiver Zahlen λ mit $0 \leqq \lambda \leqq h$ zu erstrecken ist; Σ' bedeutet eine Summation über alle Wertsysteme r_i, deren Produkt $R=0$; Σ'' eine Summation über alle Wertsysteme r_i, deren Produkt R zwar nicht verschwindet, für welche aber $|1-e(Rs_{\nu+1})| \leqq \varepsilon$, Σ''' bedeutet endlich eine Summation über alle Wertsysteme r_i, für welche $|1-e(Rs_{\nu+1})| > \varepsilon$.

Statt $|\sum\limits_{\lambda} e(R\lambda s_{\nu+1})|$ setzen wir in Σ' und Σ'' das grössere h und in Σ''' das grössere $\dfrac{2}{\varepsilon}$.

Σ' erstreckt sich höchstens auf $(2h-1)^{k-2}(k-1)$ Wertsysteme; es ist also

(4. 3) $$|\Sigma'| \leqq (2h)^{k-2} h(k-1).$$

Σ'' erstreckt sich auf p_ω Wertsysteme, deren Anzahl wir später abschätzen. Es ist

(4. 4) $$|\Sigma''| \leqq p_\omega h.$$

Σ''' erstreckt sich auf weniger als $(2h-1)^{k-1}$ Wertsysteme. Es ist

(4. 5) $$|\Sigma'''| \leqq (2h)^{k-1} \cdot \frac{2}{\varepsilon}.$$

Aus (4. 2), (4. 3), (4. 4) und (4. 5) folgern wir

(4. 6) $$|U'_\omega|^K \leqq (2h)^{K-k}\left[2^{k-2}(k-1)h^{k-1} + \frac{2^k h^{k-1}}{\varepsilon} + p_\omega h\right].$$

(3. 4) und (4. 1) kombiniert gibt

$$\limsup_{n=\infty}\left(\frac{|T_n^{(k)}|}{n}\right)^K \leqq \frac{m^{K-1}}{n^K}\sum_{\omega=1}^{m}|U'_\omega|^K$$

und weiter nach (4. 6)

$$\leqq (2h)^{K-k}\frac{m^{K-1}}{n^K}\left[m\left(2^{k-2}(k-1)h^{k-1} + \frac{2^k h^{k-1}}{\varepsilon}\right) + h\sum_{\omega=1}^{m} p_\omega\right];$$

wieder in Betracht gezogen dass $mh < n$, ergibt sich dies weiter

(4. 7) $$\leqq \frac{2^{K-2}}{h}\left(k-1+\frac{4}{\varepsilon}\right) + \frac{2^{K-k}}{n h^{k-2}}\sum_{\omega=1}^{m} p_\omega.$$

5. Wir wollen jetzt $\sum\limits_{\omega=1}^{m} p_\omega$ abschätzen. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass, wenn $|e(Rs_{\nu+1})-1|<\varepsilon$, so gibt es eine ganze Zahl S von der Beschaffenheit, dass $|S-Rs_{\nu+1}|<\frac{\varepsilon}{\pi}$.

Es ist für $h>2$, $\lambda\leqq h$, nach (2. 6) und weil $|R|<h^{k-1}$,

$$|S-Rs_{\nu+\lambda}|=\left|S-Rs_{\nu+1}+R\sum_{\mu=1}^{\lambda-1}(s_{\nu+\mu}-s_{\nu+\mu+1})\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{\varepsilon}{\pi}+R\frac{\varepsilon}{h^{k+1}}\leqq\varepsilon\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{h}\right)<\frac{2\varepsilon}{\pi}.$$

Es gibt also wenigstens

$$h\sum_{\omega=1}^{m}p_\omega \tag{5. 1}$$

Zahlen Rs_ν, $\nu<n$, die einer ganzen Zahl näher liegen als $\frac{2\varepsilon}{\pi}$. Aber nach dem Lemma des § **1.** liegen alle Folgen Rs_ν mod 1 gleichmässig. Also, wenn nur n genügend gross ist, ist für jede einzelne Folge die Anzahl der Rs_ν, die einer ganzen Zahl näher als $\frac{2\varepsilon}{\pi}$ liegen, die also mod 1 in einem Intervalle von der Länge $\frac{4\varepsilon}{\pi}$ enthalten sind, höchstens $2.\frac{4\varepsilon}{\pi}n$.

Nach (5. 1) ist also, weil es höchstens $(2h)^{k-1}$ Folgen gibt,

$$h\sum_{\omega=1}^{m}p_\omega\leqq\frac{2^{k+2}\varepsilon}{\pi}h^{k-1}n. \tag{5. 2}$$

6. Die Abschätzung (5. 2) in (4. 7) eingesetzt ergibt

$$\limsup_{n=\infty}\left(\frac{|T_n^{(k)}|}{n}\right)^K\leqq\frac{2^{K-2}}{h}\left[(k-1)+\frac{4}{\varepsilon}\right]+\frac{2^{K+2}}{\pi}\varepsilon.$$

Daraus folgt, wenn wir zuerst h gegen ∞ und dann ε gegen 0 konvergieren lassen, dass

$$\lim_{n=\infty}\frac{T_n^{(k)}}{n}=0.$$

Das ist die Gleichung (2. 5), und damit haben wir den Satz des § **2.** bewiesen.

Man sieht leicht, dass die Voraussetzungen dieses Satzes für die Folge $s_n^{(k)}=Q_n=an^p$ bestehen, wenn p nicht ganz ist und wir $k=[p]$ setzen.

(Eingegangen am 1. Juli 1929.)