Über den transfiniten Durchmesser von linearen Punktmengen.

Von M. Fekete in Jerusalem.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn Friedrich Riesz.)

1. Es sei M eine beschränkte abgeschlossene lineare (nicht leere[1])) Punktmenge, die im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ $(-\infty < a < b < \infty)$ enthalten ist. Man teile dieses Intervall mit Hilfe der Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b)$ in n abgeschlossene Teilintervalle (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ und bezeichne die transfiniten Durchmesser[2]) der Durchschnitte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ von M mit diesen Intervallen der Reihe nach mit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Sie haben

---

[1]) Ist M leer, so hat die unterfolgende Frage eine triviale Lösung.

[2]) Es sei M eine beliebige beschränkte und abgeschlossene nichtlineare Punktmenge in der komplexen z-Ebene. Dann ist der transfinite Durchmesser von M gleich dem Grenzwerte, gegen welchen die Folge der „Durchmesser" $d_2, d_3, \ldots, d_n, \ldots$ für $n \to \infty$ konvergiert. Hierbei bezeichnet d_n die $\binom{n}{2}$-te Wurzel aus dem Maximalbetrag des Ausdruckes $\prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (z_i - z_k)$, während $z_1, z_2, \ldots, z_n$ unabhängig voneinander die Punktmenge M durchlaufen. Vgl. meine Note: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Zeitschrift*, **17** (1923), S. 228—249; insbes. § 1., S. 230—232. Für eine andere Definition des transfiniten Durchmessers s. auch § 2. und § 3. der angeführten Note, S. 232—237. Vgl. auch die folgenden Aufsätze: *a*) G. Szegö, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete usw., *Math. Zeitschrift*, **21** (1924), S. 203—208; *b*) G. Pólya, Über gewisse notwendige Determinantenkriterien usw., *Math. Annalen*, **99** (1928), S. 687—706; *c*) M. Fekete, Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen. Erste Mitteilung. Erscheint demnächst in *Math. Zeitschrift*. Der transfinite Durchmesser der leeren Menge ist definitionsgemäss gleich 0; vgl. a. a. O. [2]) *b*) und *c*).

die Frage gestellt, *ob die Summe*

$$\sigma_n = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$$

einen Grenzwert besitzt, wenn n ins Unendliche wächst, derart, dass

$$\operatorname{Max}(x_1 - a,\ x_2 - x_1, \ldots, x_{n-1} - x_{n-2},\ b - x_{n-1}) = m_n$$

gegen 0 *konvergiert.*

Ich beantworte diese Frage mit Ja und zwar zeige ich, dass

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m_n \to 0}} \sigma_n = \frac{\mu}{4} \tag{1}$$

ist, wobei μ das (LEBESGUE*sche*) *Mass*[3]) *von M bezeichnet.*

2. Die Richtigkeit von (1) folgt aus dem

Hilfssatz[4]): *Es habe die beschränkte abgeschlossene lineare (nichtleere*[5])) *Punktmenge M vom Masse μ den transfiniten Durchmesser δ. Dann ist*

$$\delta \geqq \frac{\mu}{4}.$$

In der Tat, bezeichnet μ_i das Mass von M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, so ist nach dem Hilfssatze und wegen fundamentaler Eigenschaften des Masses

$$\sigma_n \geqq \frac{\mu_1}{4} + \frac{\mu_2}{4} + \ldots + \frac{\mu_n}{4} = \frac{\mu}{4}. \tag{2}$$

Andererseits gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ so, dass, sobald das System der Teilungspunkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von (a, b) die Bedingung $m_n < \eta$ erfüllt, die Summe der Längen l_{i_ν} derjenigen Teilintervalle

---

[3]) Die Messbarkeit von *M* (in LEBESGUEschen Sinne) folgt aus den Voraussetzungen. Auch die späterhin definierten Mengen M_i sind messbar (nach LEBESGUE) und jedesmal, wenn im Folgenden über Mass gesprochen wird, ist Mass in LEBESGUEschen Sinne zu verstehen.

[4]) Dieser Hilfssatz ist in einem Satze des Herrn G. PÓLYA enthalten. Vgl. seinen: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete, *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse,* **18** (1928), S. 228—232; Satz I., S. 229. Übrigens leuchtet aus der Definition des transfiniten Durchmessers sofort ein, dass auch umgekehrt, aus dem fraglichen Hilfssatze das PÓLYAsche Ergebnis folgt. Aus diesem Grunde kann seinem später folgenden selbstständigen einfachen Beweise ein gewisses Interesse zugewendet werden.

[5]) Für die leere Menge sind sowohl transfiniter Durchmesser als Mass per definitionem gleich 0; also besteht in diesem Falle $\delta = \mu/4$.

$(x_{i_\nu-1}, x_{i_\nu})$, die mit M einen nichtleeren Durchschnitt M_{i_ν} liefern, das Mass μ von M höchstens um ε übertrifft; für solches Punktsystem gilt

$$\sigma_n = \delta_{i_1} + \delta_{i_2} + \ldots + \delta_{i_\nu} + \ldots \leqq$$

$$\leqq \frac{l_{i_1}}{4} + \frac{l_{i_1}}{4} + \ldots + \frac{l_{i_\nu}}{4} + \ldots \leqq \frac{\mu + \varepsilon}{4}, \tag{3}$$

da ja der transfinite Durchmesser der Punktmenge M_{i_ν} den transfiniten Durchmesser des sie enthaltenden Intervalles $(x_{i_\nu-1}, x_{i_\nu})$ nur unterbieten kann und der letztere gleich dem Viertel der Länge l_{i_ν} des Intervalls ist.[6]) Die Beziehungen (2) und (3) zeigen, dass bei genügend dichter Einteilung von (a, b) durch die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ die Relation

$$0 \leqq \sigma_n - \frac{\mu}{4} \leqq \frac{\varepsilon}{4}$$

besteht, wie es behauptet wurde.

3. Um den Beweis von (1) zu Ende zu führen, will ich noch den oben formulierten Hilfssatz beweisen. Zu diesem Zwecke bemerke ich zunächst, dass die Menge M vom transfiniten Durchmesser δ sich durch eine Lemniskatenfläche L_ε überdecken lässt, deren transfiniter Durchmesser $\leqq \delta + \varepsilon$ ist, wobei ε eine beliebig vorgegebene positive Grösse bedeutet.[7]) Der Durchschnitt dieser Lemniskatenfläche mit dem Intervalle (a, b) besteht aus endlich vielen von einander getrennten Strecken, die ihrerseits die gegebene Menge M enthalten, folglich ist die Summe l der Längen dieser Strecken $\geqq \mu$. Die Punkte der genannten Strecken bilden eine Menge M_ε, deren transfiniter Durchmesser offenbar $\leqq \delta + \varepsilon$ ist. Aus den beiden letzten Behauptungen folgt

$$\delta + \varepsilon \geqq \frac{\mu}{4}.$$

Denn schiebt man die Strecken, ohne Änderung ihrer Aufeinanderfolge, auf der x-Achse nebeneinander, so erhält man eine einzige Strecke (von der Länge $l \geqq \mu$), deren transfiniter Durchmesser den transfiniter Durchmesser von M_ε offenbar nur unterbieten kann,

---

[6]) Vgl. a. a. O. [2]), § 4. S. 237—240.

[7]) Vgl. a. a. O. [2]) § 2 und 3, S. 232—237; s. insbes. S. 234, Fussnote [4]), Bemerkung 2.

andererseits ist der transfinite Durchmesser einer Strecke[6]) von der Länge l gleich $l/4$. Folglich muss

$$\frac{\mu}{4} \leqq \frac{l}{4} \leqq \delta + \varepsilon$$

bestehen.

Nun kann $\varepsilon < 0$ beliebig klein vorgegeben werden; so gilt auch $\delta \geqq \mu/4$. W. z. b. w.[8])

Brindisi, den 9. November 1929.

(*Eingegangen am 12. November 1929.*)

---

[8]) Der hier angewendeten Beweismethode bediente ich mich bereits in meiner Note a. a. O. [2]), *c*) bei Herleitung eines speziellen Falles des eben bewiesenen Hilfssatzes, wonach jede beschränkte und abgeschlossene lineare Punktmenge, deren transfiniter Durchmesser $= 0$ ist, notwendigerweise vom Masse Null ist.