# Über die Randwerte beschränkter Funktionen.

Von GUSTAV HÖSSJER in Lund.

Wir beweisen hier, in Beantwortung einer von P. MYRBERG gestellten Frage, den folgenden Satz:

*Es sei $y = f(x)$ eine reguläre analytische Funktion mit $|f(x)| < 1$ für $|x| < 1$. Die (nach* FATOU *fast überall vorhandenen) radialen Grenzwerte von $f(x)$ seien fast überall vom Betrag Eins. Dann bilden diese Grenzwerte auf dem Kreise $|y| = 1$ eine Menge $E$ vom Mass $2\pi$, es sei denn, dass $f(x)$ eine Konstante vom Betrag Eins ist.*

Beweis: Das Mass der Menge $E$ sei in Gegensatz zu unserer Behauptung $\mu < 2\pi$. Es ist dann möglich, $E$ mit einer anderen Menge $E'$ zu überdecken, die aus höchstens abzählbar unendlich vielen offenen Bogen des Kreises $|y| = 1$ vom Gesamtmasse $\mu'$ $(\mu < \mu' < 2\pi)$ gebildet ist. Es sei $u(y)$ die in $|y| < 1$ durch das POISSONsche Integral erklärte Potentialfunktion, deren Randwerte auf $E'$ verschwinden, auf der Komplementärmenge aber höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich Eins sind. Es sei $v(y)$ die konjugierte Potentialfunktion, wobei die eingehende Konstante nach Belieben gewählt wird. Wir setzen $g(y) = e^{u+iv}$.

Die zusammengesetzte Funktion $g(f(x))$ ist dann beschränkt und regulär für $|x| < 1$ und ihre radialen Grenzwerte sind fast überall dem Betrage nach gleich Eins. Hieraus folgt unmittelbar $|g(f(0))| \leqq 1$.

Andererseits ist $u(y) > 0$ wegen $\mu' < 2\pi$, also $|g(y)| > 1$ für $|y| < 1$. Wenn $f(x)$ keine Konstante $e^{i\theta}$ ($\theta$ reell) ist, hat man $|f(0)| < 1$, also $|g(f(0))| > 1$. Aus diesem Widerspruch folgt die Unrichtigkeit der obigen Annahme $\mu < 2\pi$, w. z. b. w.

*(Eingegangen am 31. März 1930)*