Démonstration élémentaire du théorème de Jordan sur les courbes planes.

Par B. de KERÉKJÁRTÓ à Szeged.

Il y a plus d'une vingtaine de démonstrations du théorème de JORDAN sur les courbes planes, d'après lequel *chaque courbe simple et fermée divise le plan en deux domaines.* La présente démonstration n'a aucune prétention d'originalité; en effet, j'ai essayé de donner dans ce qui suit une démonstration simple composée de parties simples des démonstrations préexistantes, laquelle me parait suffisamment facile pour être présentée en des cours élémentaires. Pour indiquer les auteurs dont j'emprunts les détails, je mettrai leurs noms entre parenthèses.

Théorème auxiliaire. *Soient K_1 et K_2 deux continus bornés dans le plan, dont la partie commune est un continu K. Si deux points du plan A et B qui n'appartiennent pas à K_1+K_2 ne sont séparés ni par K_1, ni par K_2, ils ne sont pas séparés par K_1+K_2* (DENJOY et ALEXANDER).

Démonstration. Soient w_1 et w_2 deux lignes qui joignent A et B, telles que w_1 ne rencontre pas K_1, et w_2 ne rencontre pas K_2. Nous pouvons supposer que w_1 et w_2 n'ont aucun autre point en commun que leurs extrémités A et B.[1]) Le polygone $\pi=w_1+w_2$ divise le plan en deux domaines; supposons que le continu K, qui n'a aucun point sur π, se trouve à l'intérieur de π. Les points de K_1 situés sur π et à son extérieur forment un ensemble fermé M_1 ayant une distance positive $>\delta$ de K_2 et de w_1.

---

[1]) En cas que w_1 et w_2 ont d'autres points communs, nous remplaçons A et B par deux points A' et B' communs à w_1 et w_2, tels que la partie $A'B'$ de w_1 n'ait aucun point en commun avec w_2 et les parties AA' et BB' de w_1 n'aient aucun point sur K_2.

Nous divisons le plan en des petits carrés d'arète $< \delta/4$; les carrés de la division qui contiennent des points de M_1, forment avec π et son intérieur un domaine polygonal. Soit π^* celui parmi les contours de ce domaine dont une partie est formée par la ligne w_2. L'autre partie de π^* est une ligne qui rejoint A et B sans rencontrer K_1 et K_2.

Théorème I. *Un arc simple ne divise pas le plan.*

Démonstration. Soient A et B deux points quelconques du plan qui n'appartiennent pas à l'arc $\widehat{PQ}$. Nous divisons l'arc donné $\widehat{PQ}$ en un nombre fini d'arcs consécutifs $\widehat{P_0P_1}$, $\widehat{P_1P_2}, \ldots$, $\widehat{P_{n-1}P_n}$ ($P_0 = P$, $P_n = Q$) tels que les diamètres des arcs $\widehat{P_kP_{k+1}}$ soient inférieurs aux distances des points A et B de l'arc $\widehat{PQ}$. Aucun des arcs $\widehat{P_kP_{k+1}}$ ne sépare les points A et B. En appliquant le théorème auxiliaire ci-dessus successivement aux arcs $K_1 = \widehat{P_0P_1}$ et $K_2 = \widehat{P_1P_2}$, ensuite aux arcs $K_1 = \widehat{P_0P_2}$ et $K_2 = \widehat{P_2P_3}$, etc. on obtient l'énoncé du théorème I (Alexander).

Théorème IIa. *Soit $\overline{PQ}$ un segment droit et soit $\widehat{PQ}$ un arc simple qui n'ont aucun point en commun que leurs extrémités. La courbe simple et fermée $j = \overline{PQ} + \widehat{PQ}$ divise le plan en deux domaines, au moins* (Denjoy, Winternitz et Komjáthy).

Démonstration. Soit ARB un segment perpendiculaire à $\overline{PQ}$, mené par un point intérieur R de $\overline{PQ}$ tel que ARB n'ait aucun point sur l'arc $\widehat{PQ}$. Si AwB était une ligne joignant A et B sans rencontrer la courbe j, la ligne AwB et le segment ARB formeraint un polygone fermé séparant les points P et Q, puisque ARB et $\overline{PQ}$ se croisent. L'arc $\widehat{PQ}$ doit donc rencontrer le polygone $ARB + AwB$, contrairement à notre hypothèse.

Théorème IIb. *La courbe $j = \overline{PQ} + \widehat{PQ}$ divise le plan en deux domaines, au plus.*

Démonstration. Soient A, B et C trois points arbitraires du plan, non situés sur j. D'après le théorème I, on peut les joindre à $\overline{PQ}$ par des lignes w_1, w_2, w_3 qui ne rencontrent pas l'arc $\widehat{PQ}$. Deux au moins des lignes w_1, w_2, w_3 aboutissent du même côté de $\overline{PQ}$; on peut joindre ces deux lignes par un segment droit parallèle à $\overline{PQ}$ et très voisin de lui, sans rencontrer l'arc $\widehat{PQ}$.

Nous entendons par l'intérieur et par l'extérieur d'une courbe $j = \overline{PQ} + \widehat{PQ}$ le domaine borné, respectivement le domaine non borné, déterminés par la courbe j.

Théorème IIIa. *Une courbe simple et fermée (arbitraire) divise le plan en deux domaines, au moins.*

Démonstration. Soit l un segment droit dont les extrémités P et Q appartiennent à la courbe donnée j et qui n'a aucun autre point sur j. Soient c_1 et c_2 les deux arcs de j en lesquels j est divisé par les points P et Q. Pour les courbes $j_1 = c_1 + l$ et $j_2 = c_2 + l$, les théorèmes IIa et IIb sont valables. Soient A et B deux points du plan non situés sur j, intérieurs à une circonférence très petite dont le centre est un point de c_1 et laquelle n'a aucun point sur $c_2 + l$; soit A intérieur, B extérieur à la courbe $j_1 = c_1 + l$. Je dis que les points A et B sont séparés par j. Autrement, soit w une ligne, joignant A et B sans rencontrer j; w doit rencontrer l, puisque A et B sont séparés par $j_1 = c_1 + l$. Parcourant la ligne AwB, soient A' et B' le premier et le dernier point de rencontre avec l; soient C et D deux points voisins respectivement de A' et de B' sur les parties AA' et BB' de w. Les points C et D se trouvent sur les côtés opposés de l, ils sont donc séparés par $c_2 + l$, d'après le théorème IIa. D'autre part, les parties AC et BD de la ligne w et le segment droit AB forment ensemble une ligne, joignant C et D sans rencontrer $c_2 + l$. C'est une contradiction.

Théorème IIIb. *Une courbe simple et fermée divise le plan en deux domaines, au plus.*

Démonstration. Soit R un point du plan séparé de l'infini par la courbe j. Soit $l = PRQ$ un segment droit dont les extrémités, et aucun autre point, se trouvent sur j. Désignons par c_1 et c_2 les arcs de j déterminés par les points P et Q et posons $j_1 = c_1 + l$, $j_2 = c_2 + l$. Les arcs c_1 et c_2 sont extérieurs respectivement aux courbes j_2 et j_1. Autrement, on pourrait joindre un point de l avec un point très eloigné du plan sans rencontrer c_2 (d'après le théorème I), et si c_1 était intérieur à $c_2 + l$, sans rencontrer c_1. C'est en contradiction avec notre hypothèse concernant R.

Nous entendons par l'intérieur de j la somme des intérieurs de j_1 et de j_2 et des points de l différents de P et de Q. Chaque point intérieur à j_1 (ou à j_2) peut être rejoint à un point de l dans l'intérieur de j_1 (respectivement de j_2). Donc, on peut joindre deux points quelconques de l'intérieur de j par une ligne dans l'interieur de j.

L'extérieur de j sera défini comme la partie commune des extérieurs de j_1 et de j_2. Soient A et B deux points de l'extérieur de j; ils ne sont séparés ni par j_1, ni par j_2. Les courbes j_1 et j_2 sont deux continus bornés, dont la partie commune est le continu l; d'après le théorème auxiliaire ci-dessus, il résulte qu'on peut joindre A et B par une ligne qui n'a aucun point sur $j_1 + j_2$, en particulier aucun point sur j. D'après notre définition, tout point du plan non situé sur j appartient soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de j.

(*Reçu le 8 mai 1930.*)