Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

1. In der vorliegenden Arbeit werden dem bekannten KAKEYAschen Satze analoge Sätze bewiesen. Es sei

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n=0 \tag{1}$$

eine algebraische Gleichung mit positiven Koeffizienten. Der Satz von KAKEYA besagt folgendes: *Wenn die Koeffizienten der Gleichung* (1) *den Bedingungen*

$$a_0\geqq a_1\geqq\ldots\geqq a_n>0 \tag{2}$$

genügen, dann hat die Gleichung (1) *für* $|z|<1$ *keine Wurzel.* Wir werden im folgenden statt den Koeffizienten der Gleichung gewisse aus denselben gebildete Koeffizientenfolgen betrachten. Diese Koeffizientenfolgen sollen nicht nur monoton abnehmen, sondern sie sollen auch konvex sein. Die Konvexität einer Folge wird in folgender Weise definiert. Es sei

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{3}$$

eine Folge von reellen positiven Zahlen. In einer Ebene mit einem DESCARTESschen Koordinatensystem betrachte ich die Punkte

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$$

mit den Koordinaten

$$(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), (n+1, 0).$$

Den geradlinigen Polygonzug $P_0P_1P_2\ldots P_nP_{n+1}$ nenne ich das Polygon der Folge (3). Eine Folge (3) soll *konvex* heissen, wenn das Polygon der Folge von unten konvex (nicht konkav) ist. Ein Eckpunkt P_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ soll ein *eigentlicher* Eckpunkt des Polygons heissen, wenn die Punkte $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ nicht in einer Geraden liegen.

Zuerst beweise ich den KAKEYAschen Satz mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln. Multipliziert man die ganze rationale Funktion $f(z)$ mit dem Faktor $1-z$, so entsteht

$$(1-z)\cdot f(z)=a_0-(a_0-a_1)z-(a_1-a_2)z^2-\ldots-(a_{n-1}-a_n)z^n-a_n z^{n+1}.$$

Am Rande des Einheitskreises ist aber

$$\Re\{(1-e^{i\varphi})f(e^{i\varphi})\}=a_0-(a_0-a_1)\cos\varphi-$$
$$-(a_1-a_2)\cos 2\varphi-\ldots-(a_{n-1}-a_n)\cos n\varphi-a_n\cos(n+1)\varphi\geqq$$
$$\geqq a_0-(a_0-a_1)-(a_1-a_2)-\ldots-(a_{n-1}-a_n)-a_n=0,$$

da nach (2) $a_0>0, a_0-a_1\geqq 0, a_1-a_2\geqq 0,\ldots, a_{n-1}-a_n\geqq 0, a_n>0$ gilt. Die Funktion $(1-z)f(z)$ bildet also den Kreis $|z|\leqq 1$ auf ein Teilbereich der Halbebene $\Re(z)\geqq 0$ ab, folglich kann die Funktion $f(z)$ im Inneren des Einheitskreises nicht verschwinden, w. z. b. w.

Jetzt kann ich den folgenden trivialen Satz erwähnen: *Die Gleichung* (1) *mit positiven Koeffizienten hat im Kreise* $|z|<1$ *keine Wurzel, wenn die Koeffizientenfolge*

$$(4)\qquad 2a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n>0$$

konvex ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar aus dem folgenden schönen Satz von Herrn FEJÉR.[1])

Das Kosinuspolynom $\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} c_k\cos k\theta$ *mit positiven Koeffizienten ist für jeden reellen Wert von* θ *nichtnegativ, wenn die Folge* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *konvex ist.* Aus diesem Satz folgt, da die Folge (4) konvex ist,

$$\frac{2a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos k\varphi=\Re(f(e^{i\varphi}))\geqq 0.$$

Also kann das durch die Funktion $f(z)$ vermittelte Bild des Kreises $|z|\leqq 1$ den Nullpunkt nicht in seinem Inneren enthalten. Dieser Satz ist ein Analogon des KAKEYAschen Satzes, denn aus der Konvexität der Folge (4) folgt, dass

$$2a_0\geqq a_1\geqq a_2\geqq\ldots\geqq a_n>0$$

ist.[2]) Bei dem KAKEYAschen Satz wird verlangt, dass $a_0\geqq a_1\ldots\geqq a_n>0$

---

[1]) L. FEJÉR, *a*) Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder LEGENDREschen Funktionen fortschreiten (Erste Mitteilung), *diese Acta*, **2** (1924—26), S. 75—86; *b*) Über ein trigonometrisches Analogon eines KAKEYAschen Satzes, *Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **38** (1929), S. 231—238.

[2]) S. L. FEJÉR, a. a. O. [1]) *b*).

sei; wenn wir aber die Konvexität der Folge (4) verlangen, dann kann $a_0 < a_1$ sein, doch wird immer $a_0 \geqq \frac{a_1}{2}$. Es liegt nahe, dass wenn ich die Konvexität der Folge (4) aufgebe, indem ich $a_0 < \frac{a_1}{2}$ setze, die Gültigkeit des vorigen Satzes aufhört. In Nr. **3.** kehre ich noch auf diese Bemerkung zurück. Es sei noch erwähnt, dass, wenn die Folge (4) eigentlich konvex ist, d. h. wenn die Eckpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des Polygons der Folge sämtlich eigentlich sind, die Gleichung (1) sogar für $|z| \leqq 1$ keine Wurzel besitzt. Dies folgt einfach daraus, dass in diesem Falle das Kosinuspolynom $\Re(f(e^{i\varphi}))$ für jeden reellen Wert von φ positiv ist.[3])

2. Jetzt erhebt sich zunächst die Frage, was wir über die Verteilung der Wurzeln behaupten können, wenn von dem konstanten Glied a_0 ausser seiner Positivität weiter nichts vorausgesetzt wird. Dazu beweisen wir den

Satz I. *Wenn die Koeffizienten der Gleichung* (1) *den Bedingungen*

$$a_0 > 0,\ a_1 \geqq 2a_2,\ a_2 \geqq 2a_3, \ldots, a_{n-1} \geqq 2a_n > 0 \tag{5}$$

genügen, so hat die Gleichung in dem Kreise $|z| < 1$ höchtens reelle Wurzeln.

Beweis. Ich behaupte, dass die Gleichung keine Wurzel in der oberhalb der reellen Achse liegenden Hälfte des Kreises $|z| < 1$ besitzt. Diese Behauptung wird bewiesen, indem man zeigt, dass $\Im(f(z))$ am Rande des genannten Halbkreises nirgends negativ ist. Das Sinuspolynom $\Im(f(e^{i\varphi}))$ forme ich auf die folgende Weise um:

$$\Im(f(e^{i\varphi})) = a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + \ldots + a_n \sin n\varphi =$$
$$= \sin\varphi \left(a_1 + a_2 \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} + \ldots + a_n \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \right) = \sin\varphi \,.\, \Phi(\varphi)$$

Nach den Formeln

$$\frac{\sin 2k\varphi}{\sin\varphi} = 2(\cos\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(2k-1)\varphi)$$
$$\frac{\sin(2k+1)\varphi}{\sin\varphi} = 1 + 2(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \ldots + \cos 2k\varphi)$$

[3]) S. L. Fejér, a. a. O. [1]) *b*), Satz IV.

erhält man aus $\Phi(\varphi)$ ein Kosinuspolynom

$$\Phi(\varphi) = s_0 + s_1 \cos\varphi + \ldots + s_{n-1} \cos(n-1)\varphi,$$

wobei

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_1 + a_3 + a_5 + \ldots \\
s_1 &= 2(a_2 + a_4 + a_6 + \ldots) \\
s_2 &= 2(a_3 + a_5 + a_7 + \ldots) \\
&\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\
s_k &= 2(a_{k+1} + a_{k+3} + \ldots) \\
&\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\
s_{n-2} &= 2a_{n-1} \\
s_{n-1} &= 2a_n.
\end{aligned}$$

gesetzt ist. Jetzt ergibt sich zufolge (5) sehr leicht, dass die Koeffizientenfolge

$$2s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$$

konvex ist, d. h., dass die Ungleichungen

$$\frac{2s_0 + s_2}{2} \geqq s_1$$

$$\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot$$

$$\frac{s_{k-1} + s_{k+1}}{2} \geqq s_k \qquad (k = 2, \ldots, n-2)$$

$$\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot$$

$$\frac{s_{n-2}}{2} \geqq s_{n-1}$$

gelten. Es folgt also nach Nr. **1.**, dass das Kosinuspolynom $\Phi(\varphi)$ nichtnegativ ist. Auf der Strecke $-1 \leqq x \leqq +1$ ist $\varphi = 0$ bzw. π, also wird hier $\mathfrak{J}(f(z)) = 0$; somit ist die vorige Behauptung bewiesen. Da nun die Gleichung $f(z) = 0$ reelle Koeffizienten hat, sind ihre komplexen Wurzeln paarweise konjugiert, folglich können auch im unteren Halbkreise keine komplexen Wurzeln liegen. Die Gleichung $f(z) = 0$ hat also höchstens reelle Wurzeln im Kreise $|z| < 1$.

3. Wir werden nun den Satz von Nr. **1.** verallgemeinern und zu dem Zwecke beweisen wir den

H i l f s s a t z I. *Im Inneren und am Rande des Einheitskreises seien* $\mathbf{v} = f(z)$ *und* $\mathbf{w} = g(z)$ *reguläre Funktionen;* $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{w}$ *werde ich als Vektoren in der komplexen Zahlenebene betrachten. Auf dem Rande des Kreises sei* $\mathbf{v} = f(z) \neq 0$. *Ich behaupte, dass* $f(z)$ *und* $g(z)$ *gleichviele Nullstellen im Inneren des Einheitskreises haben,* *wenn das skalare Produkt* **(v . w)** *der Vektoren* **v** *und* **w** *am Rande des Einheitskreises immer positiv oder immer negativ ist.*

Man betrachte die Formel

$$g(z) = f(z)\frac{g(z)}{f(z)} = f(z)\frac{g(z)\overline{f(z)}}{|f(z)|^2}$$

$$(6) \qquad = f(z)\left\{\frac{(\mathbf{v}.\mathbf{w})}{|f(z)|^2} + i\,\frac{\Im\left(g(z)\overline{f(z)}\right)}{|f(z)|^2}\right\}.$$

Aus dieser Formel folgt, dass das durch die Funktion $\frac{g(z)}{f(z)}$ vermittelte Bild der Kreislinie $|z|=1$ rechts von der imaginären Achse liegt, weil nach Voraussetzung für $|z|=1$ das skalare Produkt $(\mathbf{v}.\mathbf{w})>0$ ist. Somit ist die Änderung des Arcus von $\frac{g(z)}{f(z)}$ längs des Randes des Kreisbildes gleich Null; daraus folgt nach (6), dass $f(z)$ und $g(z)$ im Kreise $|z|<1$ gleichviele Nullstellen haben. Dieser Satz ist eigentlich eine Verallgemeinerung des ROUCHÉschen Satzes. Man erkennt dies, indem man $f=f_1$ und $g=f_1+f_2$ setzt, wo die Bedingung $|f_1(z)| \underset{|z|=1}{>} |f_2(z)|$ gilt; dann folgt für das skalare Produkt von $\mathbf{v}=f_1$ und $\mathbf{w}=f_1+f_2$ die Ungleichung

$$(\mathbf{w}.\mathbf{v}) = |f_1|^2\,\Re\left(\frac{f_1+f_2}{f_1}\right) = |f_1|^2\left(1+\Re\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\right) > 0,$$

da $\left|\Re\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\right| \leq \left|\frac{f_2}{f_1}\right| < 1$ ist.

Nach einer Bemerkung des Herrn v. KERÉKJÁRTÓ folgt aus der Formel (6) genau so, wie der Hilfssatz I., noch der allgemeinere

Hilfssatz II. *Im Inneren und am Rande des Einheitskreises seien die Funktionen* $\mathbf{v}=f(z)$ *und* $\mathbf{w}=g(z)$ *regulär und am Rande sei* $f(z)\neq 0$. *Wenn an jeder Stelle der Peripherie, wo das vektorielle Produkt* $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ *verschwindet, das skalare Produkt* $(\mathbf{v}.\mathbf{w})$ *konstantes Vorzeichen hat, so haben die Funktionen* $f(z)$ *und* $g(z)$ *gleichviele Nullstellen im Innern des Einheitskreises.* (Dasselbe gilt, wenn an jeder Stelle der Peripherie, wo das skalare Produkt verschwindet, das vektorielle Produkt $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \Im\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)|f(z)|^2$ konstantes Vorzeichen hat.)

Satz II. *Die Gleichung*

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0$$

mit positiven Koeffizienten[4]) *besitzt genau eine Wurzel im Inneren des Einheitskreises, wenn die positive Koeffizientenfolge*

$$2a_1,\ (a_0+a_2),\ a_3,\ a_4,\ldots,a_n \tag{7}$$

eigentlich konvex ist.

Beweis. Ich setze

$$\mathbf{w}=f(z)=z$$

und

$$\mathbf{v}=g(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n;$$

dann wird

$$(\mathbf{w}\,.\,\mathbf{v})=\frac{2a_1}{2}+(a_0+a_2)\cos\varphi+\sum_{k=2}^{n-1}a_{k+1}\cos k\,\varphi$$

nach Fejérs Satz ein positives Kosinuspolynom, folglich hat die Gleichung nach Hilfssatz I. genau eine Wurzel in dem Kreise $|z|<1$.

In Nr. **1.** haben wir gesehen, dass, wenn die Koeffizientenfolge

$$2a_0,\ a_1,\ldots,a_n>0 \tag{8}$$

eigentlich konvex ist, die Gleichung für $|z|\leqq 1$ keine Wurzel hat. Man zerstöre jetzt die Konvexität der Folge (8) dadurch, dass man $2a_0<a_1$ setzt. Die Koeffizienten der Gleichung genügen alsdann den Bedingungen

$$a_0<\frac{a_1}{2} \tag{9}$$

$$a_2<\frac{a_1+a_3}{2} \tag{9'}$$

$$a_3<\frac{a_2+a_4}{2} \tag{9''}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$a_k<\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}\qquad(k=4,5,\ldots,n-1) \tag{10}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$a_n<\frac{a_{n-1}+0}{2}.$$

Ich behaupte, dass unter diesen Bedingungen die Folge (7) eigentlich konvex ist. Addiert man nämlich (9) und (9′), dann wird

$$a_0+a_2<\frac{2a_1+a_3}{2},$$

---

[4]) Der Satz gilt auch dann, wenn eine der Grössen a_0 und a_2 negativ ist.

ferner, da $a_0 > 0$ ist, zufolge (9″)

$$a_3 < \frac{a_0 + a_2 + a_4}{2}.$$

Es folgt also nach Satz II., dass unter den Bedingungen (9), (9′), (9″), (10) die Gleichung $f(z) = 0$ genau eine Wurzel im Innern des Einheitskreises hat. Dieses Ergebnis lässt sich geometrisch folgenderweise deuten: Man zeichne das Polygon $P_0 P_1 P_2 \ldots P_n P_{n+1}$ der Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ und verbinde den Punkt P_0 mit dem Punkte $P_{-1}(-1, 0)$. Wenn nun der Polygonzug $P_{-1} P_0 P_1 P_2 \ldots P_n P_{n+1}$ in den Eckpunkten $P_0, P_2, P_3, \ldots, P_n$ konvex ist, so hat die Gleichung im Kreise $|z| < 1$ genau eine Wurzel; der Polygonzug ist im Punkte P_1 konkav. Die Konkavität im Punkte P_1, d. h. die Ungleichung $\frac{a_0 + a_2}{2} < a_1$, folgt einfach daraus, dass wegen der Konvexität der Folge (7)

$$2a_1 > a_0 + a_2$$

ist.

Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz III. *Wenn der Polygonzug $P_{-1} P_0 P_1 P_2 \ldots P_n P_{n+1}$ in dem Eckpunkt P_1 konkav und in den anderen Eckpunkten konvex ist, so hat die Gleichung in dem Kreise $|z| < 1$ genau eine Wurzel.*

Satz IV. *Es sei k eine ganze Zahl, für welche $0 \leq k \leq n$ ist. Die Gleichung $g(z) = 0$ hat k Wurzeln in dem Kreise $|z| < 1$, wenn die Koeffizientenfolge*

$$(11) \qquad (a_{k-\nu} + a_{k+\nu})$$

$$(0 \leq \nu \leq \operatorname{Max}(k, n-k); \quad a_\lambda = 0 \text{ für } \lambda < 0 \text{ oder } \lambda > n)$$

eigentlich konvex ist.

Beweis. Es sei

$$\mathbf{w} = f(z) = z^k$$

und

$$\mathbf{v} = g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n;$$

dann wird das skalare Produkt

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) = a_k + \sum_{\nu=1}^{\operatorname{Max}(k, n-k)} (a_{k-\nu} + a_{k+\nu}) \cos \nu\varphi$$

nach Fejérs Satz ein positives Kosinuspolynom, also hat die Gleichung $g(z) = 0$ nach Hilfssatz I. k Wurzeln in dem Kreise $|z| < 1$.

Wenn wir im Satz IV. speziell $k = 0$ setzen, erhalten wir den trivialen Satz von Nr. **1.**, und es ergibt sich für $k = 1$ der Satz II.

Satz V. *Wenn der Polygonzug $P_{-1}P_0P_1\ldots P_nP_{n+1}$ in dem Eckpunkt P_k konkav und in den anderen Eckpunkten konvex ist, so hat die Gleichung in dem Kreise $|z|<1$ genau k Wurzeln.*

Beweis. Laut Voraussetzung gelten die Ungleichungen

$$(12)\qquad \frac{a_{k-(\nu+1)}+a_{k-(\nu-1)}}{2}>a_{k-\nu}$$

$$(12')\qquad \frac{a_{k+(\nu-1)}+a_{k+(\nu+1)}}{2}>a_{k+\nu}$$

$$(\nu=1,2,\ldots,\mathrm{Max}\,(k,n-k))$$

worin $a_\lambda=0$ wenn $\lambda<0$ oder wenn $\lambda>n$ ist. Durch Addition von (12) und (12') erhält man

$$\frac{(a_{k-(\nu-1)}+a_{k+(\nu-1)})+(a_{k-(\nu+1)}+a_{k+(\nu+1)})}{2}>a_{k-\nu}+a_{k+\nu}.$$

Diese Ungleichungen bedeuten gerade die Konvexität der Folge (11); nach Satz IV. folgt also, dass die Gleichung in dem Kreise $|z|<1$ genau k Wurzeln hat.

4. Herr Fejér hat in der unter [1]) zitierten Arbeit *b)* unter andern den folgenden Satz bewiesen: Ein beliebiges Kosinuspolynom

$$\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}c_k\cos k\varphi$$

mit konvexer Koeffizientenfolge $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ kann im Intervalle $0<\varphi<2\pi$ nur für

$$\varphi_k=k\frac{2\pi}{n+1}\qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

verschwinden. Mit Hilfe dieses Satzes beweise ich den

Satz VI. *Es sei die Koeffizientenfolge*

$$(a_{1-\nu}+a_{1+\nu})\qquad (\nu=0,1,\ldots,n-1)$$

(worin $a_{1-\nu}=0$ gesetzt ist, wenn $1-\nu<0$ ist) positiv und konvex (nicht notwendig eigentlich); wenn die Punkte

$$z_\nu=\frac{g\left(e^{i\nu\frac{2\pi}{n}}\right)}{e^{i\nu\frac{2\pi}{n}}}\qquad (\nu=1,2,\ldots,n-1)$$

alle oberhalb der reellen Achse (oder alle unterhalb der reellen Achse) liegen, dann hat die Gleichung $g(z)=0$ genau eine Wurzel in dem Kreise $|z|<1$.

Beweis. Es sei

$$\mathbf{w} = f(z) = z$$

und

$$\mathbf{v} = g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

dann kann das skalare Produkt

$$(\mathbf{w} \,.\, \mathbf{v}) = \frac{2a_1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_{1-\nu} + a_{1+\nu}) \cos \nu\varphi$$

nach dem vorher erwähnten Satze von Fejér nur in den Punkten

$$z = e^{i\nu\frac{2\pi}{n}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

verschwinden. Laut Voraussetzung hat $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ in diesen Punkten stets dasselbe Vorzeichen; nach Hilfssatz II. haben also die Gleichungen $f(z) = 0$ und $g(z) = 0$ gleichviele Nullstellen im Kreise $|z| < 1$.

Ujpest, den 10. Juni 1930.

(*Eingegangen am 3. Juli 1930.*)