Über die Dichtigkeit der Primzahlen einer arithmetischen Progression.

Von Gustav Rados in Budapest.

Eine der glänzendsten Leistungen Lejeune Dirichlets war es nachgewiesen zu haben, dass jede arithmetische Progression, deren Anfangsglied und Differenz gegen einander relative Primzahlen sind, unendlich viele Primzahlen enthält. Gleichfalls ihm ist das schöne Resultat zu verdanken, das sich auf die Dichtigkeit der in einer solchen Progression enthaltenen Primzahlen bezieht.[1]) Es sei die arithmetische Progression:

$$a,\ a+k,\ a+2k, \ldots, a+nk, \ldots \tag{a}$$

und

$$(a, k) = 1,$$

ferner seien die in dieser Progression vorkommenden Primzahlen

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i, \ldots;$$

alsdann wird

$$D = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \pi_i^{-1-\varrho}}{\log \frac{1}{\varrho}}$$

die Dichtigkeit der Primzahlen π_i genannt.

Dirichlet hat nun nachgewiesen, dass für alle Progressionen a) die Gleichheit

---

[1]) S. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, § 112. In einer ungarischen Arbeit, die im **43.** Bd. von *Math. és Természettud. Értesitő* erschienen ist, habe ich diesen Satz irrtümlicherweise Herrn E. Landau zuerkannt, worauf Herr Landau mich um die Richtigstellung dieser Angabe ersuchte.

$$D = \frac{1}{\varphi(k)} \tag{I}$$

statthat.

Es dürfte von einigem Interesse sein, dass für den speziellen Fall $a = 1$ die DIRICHLETsche Beziehung I) durch den KRONECKERschen Irreducibilitätssatz verifiziert werden kann.

Dies soll im nachfolgenden gezeigt werden.

Die Kreisteilungs-Kongruenz.

Die Primzahlzerlegung von k sei

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

ferner seien die Teiler von k der Grösse nach geordnet

$$d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots, d_{S(k)},$$

der konjugierte Teiler von d_i sei d'_i, so dass

$$d_i d'_i = k$$

ist; ferner bedeute ε_d das MÖBIUSsche Symbol, das gleich Null ist im Falle, dass d einen quadratischen Teiler besitzt, sonst gleich $+1$ oder -1 ist, je nach dem die Anzahl der Primfaktoren von d gerade oder ungerade ist; alsdann ist bekanntlich das Kreisteilungs-Polynom vom Grade $\varphi(k)$

$$\Phi_k(x) = \prod_{i=1}^{S(k)} (x^{d'_i} - 1)^{\varepsilon_d} = \frac{(x^k - 1)\, \Pi\left(x^{\frac{k}{p_1 p_2}} - 1\right) \Pi\left(x^{\frac{k}{p_1 p_2 p_3 p_4}} - 1\right) \ldots}{\Pi\left(x^{\frac{k}{p_1}} - 1\right) \Pi\left(x^{\frac{k}{p_1 p_2 p_3}} - 1\right) \ldots}$$

im natürlichen Rationalitätsbereich irreduzibel Es ist auch ferner bekannt, dass die Kongruenz

$$\Phi_k(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

in dem Falle, dass k Teiler von $p-1$ ist, diejenigen $\varphi(k)$ Zahlen der reduzierten Restenreihe des Moduls p zu Wurzeln hat, die mod. p zum Exponenten k gehören.

Es kann nun gezeigt werden, dass die Anzahl der Wurzeln dieser Kongruenz, ν_p, gleich $\varphi(k)$ oder Null ist, je nachdem k Teiler oder Nichtteiler von $p-1$ ist

Die Richtigkeit des ersten Teiles dieser Behauptung geht aus dem Obigen hervor, so dass nur $\nu_p = 0$ nachzuweisen ist im Falle, dass k Nichtteiler von $p-1$ ist.

Die binomische Kongruenz

$$x^k - 1 \equiv 0 \pmod{p} \tag{1}$$

hat bekanntlich δ verschiedene Wurzeln, falls δ den grössten gemeinschaftlichen Teiler von k und $p-1$ bedeutet.

Bekannt ist ferner die Identität

$$x^k - 1 = \prod_{i=1}^{S(k)} \Phi_{d_i}(x). \tag{J}$$

Auf Grund dieser beiden Tatsachen kann nun leicht nachgewiesen werden, dass für jeden Nichtteiler k von $p-1$

$$\nu_p = 0$$

ist.

Erster Fall $\delta < k$. Es seien die sämtlichen Teiler von δ

$$d_1, d_2, \ldots, d_g;$$

alsdann sind die Wurzeln der Kongruenzen

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_{d_1}(x) \equiv 0 \\ \Phi_{d_2}(x) \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{d_g}(x) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p} \tag{K}$$

der Reihe nach diejenigen Zahlen, die in Bezug auf den Modul p resp. zu den Exponenten $d_1, d_2, \ldots, d_g$ gehören. Die Anzahl dieser von einander verschiedenen Wurzeln ist

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_g) = \delta,$$

da

$$d_1, d_2, \ldots, d_g$$

die sämtlichen Teiler von δ sind. In Folge der Identität J) befriedigen diese Wurzeln alle auch die binomische Kongruenz 1), und da ihre Anzahl gleich δ ist, liefern sie auch alle Wurzeln von 1). Demnach kann die Kongruenz

$$\frac{x^k - 1}{\Phi_{d_1}(x)\,\Phi_{d_2}(x)\ldots\Phi_{d_g}(x)} \equiv \Phi_{d_g+1}(x)\ldots\Phi_{d_{S(k)}}(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

keine Wurzeln mehr besitzen, also auch

$$\Phi_{d_{S(k)}}(x) \equiv \Phi_k(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

ist wurzellos, demnach

$$\nu_p = 0.$$

Zweiter Fall $\delta = k$. In diesem Falle ist k Teiler von $p-1$, daher

$$\nu_p = \varphi(k).$$

Zusammenfassend kann daher behauptet werden, dass $\nu_k = \varphi(k)$ oder $\nu_p = 0$ ist je nachdem $p \equiv 1 \pmod{k}$ oder $p \not\equiv 1 \pmod{p}$ ist oder je nachdem p der arithmetischen Progression

$$1,\ 1+k,\ 1+2k, \ldots, 1+nk, \ldots$$

angehört oder nicht angehört.

Beweis des Hauptsatzes.

Der zu beweisende Satz lautet wie folgt:
Sind die in der arithmetischen Progression

$$1,\ 1+k,\ 1+2k, \ldots, 1+nk, \ldots \tag{2}$$

vorkommenden Primzahlen

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i, \ldots$$

als dann ist die Dichtigkeit dieser Primzahlen

$$D = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \pi_i^{-1-\varrho}}{\log \frac{1}{\varrho}} = \frac{1}{\varphi(k)}.$$

Wenden wir Kroneckers Irreducibilitäts-Theorem[2]) auf die irreducible Kreisteilungs Gleichung

$$\Phi_k(x) = 0$$

an, so ist die Anzahl ihrer irreducibeln Faktoren $\nu = 1$; die Anzahl der Kongruenzwurzeln von

$$\Phi_k(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

ν_p ist gleich Null in dem Falle dass p in der arithmetischen Pro-

---

[2]) S. Leopold Kronecker, Über die Irreductibilität von Gleichungen, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften,* 1880. S. 155—162. Dieses Theorem lautet folgendermassen: „Ist $F(x)$ eine ganze ganzzahlige Function von x und bedeutet ν_p in der auf alle Primzahlen p ausgedehnten Summe $\Sigma \nu_p p^{-1-w}$ die Anzahl der (gleichen oder verschiedenen) Wurzeln der Congruenz $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$, so wird Grenzwert jener Reihe für unendlich kleine positive Werte von w proportional $\log \frac{1}{w}$ und zwar gleich $\log \frac{1}{w}$ multiplicirt mit der Anzahl der irreductiblen Factoren von $F(x)$."

gression 2) nicht vorkommt und gleich $\varphi(k)$ falls p in dieser Progression enthalten ist. Es ist demnach

$$1 = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(k)\, \pi_i^{-1-\varrho}}{\log \frac{1}{\varrho}}$$

und hieraus schliesslich

$$D = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^{-1-\varrho}}{\log \frac{1}{\varrho}} = \frac{1}{\varphi(k)},$$

womit Dirichlets Theorem über die Dichtigkeit der in der Progression $1 + nk$ enthaltenen Primzahlen bewiesen ist.

(Eingegangen am 27. September 1930.)