Über die notwendigen Bedingungen beim zweidimensionalen Variationsproblem einfachster Art.

Von LUDWIG SCHULER in München.

Inhaltsübersicht.

§ 1.

1. Die im Folgenden betrachteten Funktionen seien eindeutig. x, y, z seien als cartesische Raumkoordinaten aufgefaßt. Im Anschluß an H I und R[1]) betrachte ich folgendes Variationsproblem: Gegeben ein von einer geschlossenen einmal stetig differenzierbaren JORDANkurve C begrenztes Gebiet G der (x, y)-Ebene. C sei darstellbar durch die für $t_1 \leqq t \leqq t_2$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$; $x'^2 + y'^2 > 0$, $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$. Weiterhin gebe ich eine für $t_1 \leqq t \leqq t_2$ einmal stetig differenzierbare Funktion $z = z(t)$, $z(t_1) = z(t_2)$ an, so daß die durch $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ dargestellte Raumkurve C' geschlossen und doppelpunktlos ist. Zu C gebe es eine natürliche Zahl n, so daß

[1]) Erklärung der Zitate dieser Art siehe Literaturverzeichnis (am Schluß der Arbeit).

C von jeder achsenparallelen Geraden in höchstens n Punkten getroffen wird. Dann gebe ich einen offenen Raumteil R des R_3, der C' enthalte und in Bezug auf z konvex sei,[2]) und eine in R und für alle endlichen p, q zweimal nach ihren Argumenten stetig differenzierbare Funktion $f = f(z, y, z, p, q)$ an. Nun wird das relative Minimum von

$$I[z(x, y)] = \iint_G f(x, y, z, z_x, z_y)\, dx\, dy$$

betrachtet und gefragt, welchen notwendigen Bedingungen eine im abgeschlossenen Gebiet G einmal stetig differenzierbare Fläche $z = z_0(x, y)$, die durch C' geht, genügen muß, damit

$$(1) \qquad I[z(x, y)] \geqq I[z_0(x, y)]$$

sei für alle zulässigen $z = z(x, y)$, wobei zulässig wie folgt definiert ist:

(2) $\left\{\begin{array}{l} 1^0 \text{ Die Fläche } z = z(x, y) \text{ geht durch } C'. \\ 2^0\ z = z(x, y) \text{ ist im abgeschlossenen Gebiet } G \text{ einmal stetig differenzierbar.} \\ 3^0 \text{ Es ist } |z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho, \text{ wobei } \varrho \text{ eine feste positive Zahl bedeutet; und sowohl } z = z_0(x, y), \text{ als auch } z = z(x, y) \text{ liegen in } R. \end{array}\right.$

In H I und R wird auf die Bedeutung der Differenzierbarkeitsbedingungen für $z = z_0(x, y)$ hingewiesen; in H I wird unter Benutzung der bekannten Methode der Variation der abhängigen Veränderlichen gezeigt, daß $z = z_0(x, y)$ dem folgenden System (I) genügen muß:

$$(\mathrm{I}) \qquad f_p - \Omega_y = \omega_y, \quad f_q - \Omega_x = -\omega_x, \quad f_z - 2\Omega_{xy} = 0.$$

Dabei ist $\omega = \omega(x, y)$ eine in G einmal stetig differenzierbare, $\Omega = \Omega(x, y)$ aber eine Hilfsfunktion, für welches Ω_{xy} in G existiert und stetig ist.

In R wird durch Anwendung der Variation der unabhängigen Veränderlichen gezeigt, daß $z = z_0(x, y)$ zwei weitern Systemen genügen muß, die ich in der dortigen Reihenfolge System (II) und (III) nennen will. Daselbst wird gezeigt, daß für zweimal stetig differenzierbare $z = z_0(x, y)$ System (II) und (III) eine Folge des Systems (I) sind. Herr RADÓ schnitt dort die Frage an, ob diese

---

[2]) Dies bedeutet: wenn für $z_1 < z_2$ die Punkte (x, y, z_1) und (x, y, z_2) in R liegen, dann auch der Punkt (x, y, z) für $z_1 < z < z_2$.

Abhängigkeit auch für nur einmal stetig differenzierbare $z=z_0(x, y)$ zutreffe; diese Frage nenne ich die RADÓsche Abhängigkeitsfrage. Herr HAAR zeigt in H II,[3]) daß für reguläre Variationsprobleme die Abhängigkeitsfrage zu bejahen ist. Dortselbst wird die allgemeine Lösung dieser Abhängigkeitsfrage wiederum als Problem formuliert. Weiter wird in Sch auf Grund des dortigen Satzes II die RADÓsche Abhängigkeitsfrage bejaht, wenn $z_{0x}(x, y)$, $z_{0y}(x, y)$ einer LIPSCHITZ—HÖLDERschen Bedingung mit dem Exponenten $\alpha > {}^1/_2$ genügen.

Gegenüber diesen Arbeiten werde ich im folgenden **§ 2.** nach allgemeiner Herleitung einer ersten notwendigen Bedingung die Abhängigkeitsfrage endgültig lösen. Im **§ 3.** werde ich die in der Inhaltsangabe angekündigten Übertragungen bringen. Im **§ 4.** leite ich mit einer neuen Methode eine fünfte notwendige Bedingung her und gewinne die Ergebnisse von H II auf sehr einfache Weise.

§ 2.

2. Ich setze die zulässigen Funktionen zur Auswertung von (1) in der folgenden einparametrigen Form an:

$$(3)\quad \begin{cases} 1^0\ z=z(x, y; \varepsilon) \text{ sind zulässig für } \varepsilon_1 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_2,\ \varepsilon_1 < 0, \\ \varepsilon_2 > 0. \\ 2^0 \text{ in den genannten Gebieten seien die } z(x, y; \varepsilon) \\ \text{zweimal nach } \varepsilon \text{ stetig differenzierbar.} \\ 3^0\ z(x, y; 0) = z_0(x, y). \end{cases}$$

Aus (3), 1^0 folgt:

$$(4)\qquad \frac{\partial z(x, y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial^2 z(x, y; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} = 0 \quad \text{entlang } C.$$

Nun soll also

$$(1')\qquad I[z(x, y; \varepsilon)] \geqq I[z_0(x, y)] \qquad \text{für } \varepsilon_1 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_2$$

sein, d. h. für (1) ist notwendig

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} I[z(x, y; 0)] = 0.$$

Ich beweise nun

---

[3]) Der Beweis auf S. 230 in H II könnte einfacher durch Anwendung des Satzes von W. H. YOUNG, On a New Set of Conditions for a Formula for an Area, *Proceeding of the London Math. Society*, (2) **21** (1922—23), S. 75—94 geführt werden; vgl. Sch, Fußnote [10]), S. 42.

S a t z 1. *Notwendig und hinreichend für* (5) *ist, daß* $z = z_0(x, y)$ *dem System* (I) *genügt.*

B e w e i s. Es ist[1])

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} I[z(x, y; 0)] =$$

$$= \iint_G \left\{ f_z^0 \frac{\partial z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} + f_p^0 \frac{\partial z_x(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} + f_q^0 \frac{\partial z_y(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} \right\} dx\, dy.$$

Aus (4) folgt die grundlegende Tatsache, daß $\dfrac{\partial z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon}$ wie das $\zeta(x, y)$ von H I zu gebrauchen ist. Dazu benutze ich folgende Integralumformung

$$(\mathrm{U})\qquad \left\{ \begin{aligned} f_z^0 \frac{\partial z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial z(x. y; 0)}{\partial \varepsilon} \int f_z^0\, dx \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} \int f_z^0\, dy \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial z_x(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} \int f_z^0\, dx - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial z_y(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} \int f_z^0\, dy. \end{aligned} \right.$$

Ich wende nun (U) auf (6) an, ebenso den GREENschen Satz und erhalte

$$(6')\qquad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} I[z(x, y; 0)] =$$

$$= \iint_G \left\{ \left(f_p^0 - \frac{1}{2} \int f_z^0\, dx \right) \frac{\partial z_x(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} + \left(f_q^0 - \frac{1}{2} \int f_z^0\, dy \right) \frac{\partial z_y(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} \right\} dx\, dy.$$

Auf (6′) wende ich Satz I von Sch an, womit der verlangte Beweis erbracht ist.

A n m e r k u n g. Grundlegend für den vorliegenden Beweis ist die Benutzung von $\dfrac{\partial z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon}$ statt des genannten $\zeta(x, y)$; die Anwendung von (U) vereinfacht die Gewinnung von (6′) gegenüber der in H I.

Da in Satz 1. die angegebene Bedingung auch hinreichend ist, ergibt sich sofort der

S a t z 2. *Wenn* $z = z_0(x, y)$ *dem System* (I) *genügt, so genügt es von selbst den Systemen* (II) *und* (III); damit ist die RADÓsche Abhängigkeitsfrage endgültig gelöst.

---

[1]) $f^0 = f(x, y, z_0, z_{0x}, z_{0y})$; $f = f(x, y, z, z_x, z_y)$ (für zulässige $z(x, y)$).

Weiter gilt ersichtlich

Satz 3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß* $z = z_0(x, y)$ *dem System* (I) *genügt, ist, daß* $z_0(x, y)$ *der folgenden Bedingung genügt:*

$$(\mathrm{D}_1) \qquad f_z - \frac{\partial}{\partial x}(f_p - \omega_y) - \frac{\partial}{\partial y}(f_q + \omega_x) = 0.$$

Die Analogie zwischen der EULERschen Gleichung unseres Problems und der (D_1) ist ersichtlich. Nun kann ich formulieren:

Satz 4. *Die erste notwendige Bedingung für* $z = z_0(x, y)$ *ist, daß* $z_0(x, y)$ *dem System* (I) *oder der Gleichung* (D_1) *genügt.*

Jede in R liegende Lösung von System (I) heiße im Anschluß an B eine *Extremale.*

§ 3.

3. $z_0(x, y)$ genüge jetzt der ersten notwendigen Bedingung. Außer (5) ist für (1) ersichtlich notwendig, daß

$$(7) \qquad \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} I[z(x, y; 0)] \geqq 0.$$

Nun ist hier

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} I[z(x, y; 0)] = \iint\limits_G \Big\{ & f^0_{zz}\left(\frac{\partial z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \ldots + f^0_{qq}\left(\frac{\partial z_y(x, y; 0)}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \\ & + f^0_z \frac{\partial^2 z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2} + f^0_p \frac{\partial^2 z_x(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2} + f^0_q \frac{\partial^2 z_y(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2} \Big\} \, dx\, dy. \end{aligned}$$

Gegenüber dem in ζ, ζ_x, ζ_y homogen-quadratischen Integranden bei B, S. 673 habe ich in (8) das Zusatzglied

$$f^0_z \frac{\partial^2 z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2} + f^0_p \frac{\partial^2 z_x(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2} + f^0_q \frac{\partial^2 z_y(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2}.$$

Gemäß der ersten notwendigen Bedingung gilt nun

$$\begin{aligned} & f^0_z \frac{\partial^2 z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2} + \ldots + f^0_q \frac{\partial^2 z_y(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2} = \\ (9) \qquad & = \omega_y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2}\right) - \omega_x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2}\right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Omega_y \frac{\partial^2 z_y(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Omega_x \frac{\partial^2 z_x(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2}\right), \end{aligned}$$

wie man durch leichte Rechnung feststellt. Gemäß dem GREENschen Satze und (4) ist

$$(10) \quad \iint\limits_G \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\Omega_y \frac{\partial^2 z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Omega_x \frac{\partial^2 z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2}\right) \right\} dx\, dy = 0.$$

Ebenso nach dem Satze von W. H. YOUNG (vgl. Zitat [3]))

$$(11) \quad \iint\limits_G \left\{ \omega_y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2}\right) - \omega_x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon^2}\right) \right\} dx\, dy = 0.$$

Deshalb

$$(8') \quad \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} I[z(x, y; 0)] =$$

$$= \iint\limits_G \left\{ f_{zz}^0 \left(\frac{\partial z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \ldots + f_{qq}^0 \left(\frac{\partial z_y(x, y; 0)}{\partial \varepsilon}\right)^2 \right\} dx\, dy.$$

Der Integrand der rechten Seite geht für $\dfrac{\partial z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon} = \zeta$ in den entsprechenden von B, S. 673 über, sodaß die Benutzung der allgemeinen z-Variation in der Form $z = z(x, y; \varepsilon)$ auch hier zu den Ergebnissen führt, wie die der üblichen $z_\varepsilon = z_0 + \varepsilon \zeta(x, y)$. Es gilt also auch hier

Satz 5. *Die zweite notwendige Bedingung für* $z = z_0(x, y)$ *ist:*

$$f_{pp}^0 f_{qq}^0 - f_{pq}^{0\,2} \geqq 0, \quad f_{pp}^0 \geqq 0.$$

In der *verschärften Form* sollen die Gleichheitszeichen nicht gelten.

4. Die weitere Auswertung von (8′) zur JACOBIschen Theorie ist in H III (insbesondere S. 12—15) erledigt. Daselbst wird die hier in **5, 6, 7.** folgende Übertragung der WEIERSTRASZschen Theorie ausdrücklich als Problem formuliert. Ich habe die Übertragung der JACOBIschen Theorie im März 1930 im Anschluß an meine Zulassungarbeit zum bayerischen Staatsexamen durchgeführt; ich teile ihr Hauptergebnis deshalb hier mit:

Satz. *Die dritte notwendige Bedingung für* $z = z_0(x, y)$ *lautet: Es darf keine Lösung* $u_0(x, y)$ *des Systems* (IV) *existieren, die im abgeschlossenen Gebiet G einmal stetig differenzierbar ist, längs einer einmal stetig differenzierbaren* JORDAN*kurve K, die in G liegt, verschwindet, wobei* $u_{0x}^2 + u_{0y}^2 \not\equiv 0$ *entlang K; dabei hat System* (IV) *die Gestalt:*

$$(\mathrm{IV}) \quad \begin{cases} \Phi_{ux}[u] - \Omega_{4y} = \omega_{4y}(x, y) \\ \Phi_{uy}[u] - \Omega_{4x} = -\omega_{4x}(x, y) \\ \Phi_u[u] - 2\Omega_{4xy} = 0, \end{cases}$$

wobei der Integrand von (8′) *mit* $\Phi\left[\dfrac{\partial z(x, y; 0)}{\partial \varepsilon}\right]$ *bezeichnet ist und* $\omega_4(x, y)$ *eine im abgeschlossenen Gebiet* G *einmal stetig differenzierbare,* $\Omega_4(x, y)$ *aber eine Hilfsfunktion ist, für welche* Ω_{xy} *in* G *existiert und stetig ist.*

5. Nun zur Übertragung der WEIERSTRASZschen Theorie! Im Folgenden seien die drei ersten notwendigen Bedingungen als erfüllt vorausgesetzt. Weiter nehme ich an, es gebe eine einparametrige Lösungsschar $z = \varphi(x, y; \alpha)$, $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, zum System (I); $\varphi_{x\alpha}$, $\varphi_{y\alpha}$ seien noch stetig im abgeschlossenen G und für $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$.

Ich setze voraus, die Extremalen bilden ein Feld F, d. h. zwei Extremalen haben keinen Punkt gemein, wenn sie zu verschiedenen α gehören; hierbei und im Folgenden seien die (x, y) stillschweigend aus G gewählt. Ich bemerke, daß F perfekt ist; natürlich $F \leqq R$.

Die „inverse Feldfunktion“ $\alpha = a(x, y, z)$ ist in F einmal stetig differenzierbar und es gilt

$$(12)\qquad \begin{cases} a_x = -\left[\dfrac{\varphi_x}{\varphi_\alpha}\right]_{\alpha = a(x, y, z)}, \\[2ex] a_y = -\left[\dfrac{\varphi_y}{\varphi_\alpha}\right]_{\alpha = a(x, y, z)}, \\[2ex] a_z = \left[\dfrac{1}{\varphi_\alpha}\right]_{\alpha = a(x, y, z)}. \end{cases}$$

(Es soll kaum bemerkt werden, daß

$$[a]_{z=\varphi} \equiv \alpha; \quad [\varphi]_{\alpha = a} \equiv z$$

ist.) Ich bezeichne

$$(13)\qquad \begin{cases} [\varphi_x]_{\alpha = a(x, y, z)} = p(x, y, z), \\ [\varphi_y]_{\alpha = a(x, y, z)} = q(x, y, z) \end{cases}$$

und nenne $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ die Gefällfunktionen des Feldes F.

6. Man sagt: F umgibt $z_0(x, y)$, wenn $z_0(x, y) = \varphi(x, y; \alpha_0)$, und die in (2), 3⁰ definierte ϱ-Nachbarschaft von $z_0(x, y)$ ganz in F liegt. Analog wie bei B, S. 101, gilt hier der

Satz 6. *Wenn* $\varphi(x, y; \alpha)$ *die in* **5.** *definierte Schar bedeutet, für die*

1⁰ $z_0 = \varphi(x, y; \alpha_0)$,

2⁰ $|\alpha - \alpha_0| \leqq d_0$; $d_0 > 0$, 3⁰ *von der nicht vorausgesetzt wird, daß sie ein Feld F bildet, so ist*

$$(14) \qquad \varphi_\alpha(x, y; \alpha_0) \neq 0$$

hinreichend dafür, daß ein $k > 0$ existiert, so daß durch die $\varphi(x, y; \alpha)$ für $|\alpha - \alpha_0| \leq k$ ein $z_0(x, y)$ umgebendes Feld F_k definiert wird.

Anmerkung. Wenn von $\varphi(x, y; \alpha)$ vorausgesetzt wird, daß sie ein Feld bildet, so ist (14) notwendig für die Existenz des F_k.

7. Die Differentialgleichungen der Gefällfunktionen und das Analogon des WEIERSTRASZschen Fundamentalsatzes.

Ich setze die Existenz eines $z_0(x, y)$ umgebenden Feldes F_k voraus. Ist $f = f(x, y; \alpha)$, so soll der Ausdruck $f(x, y, a(x, y, z))$ mit $[f]$ bezeichnet werden. Mit dieser Bezeichnung kann ich statt (D_1) für die $\varphi(x, y; \alpha)$ von F_k auch schreiben:[5])

$$(15) \qquad [f_z] - \left[\frac{\partial}{\partial x}(f_p - \omega_y)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial y}(f_q + \omega_x)\right] = 0.$$

Zur Abkürzung sei

$$f - p\,\omega_y + q\,\omega_x = F$$

gesetzt; dann gilt

$$(16) \qquad \begin{cases} [f_z] = [f]_z - \bar{p}_z [f_p] - \bar{q}_z [f_q], \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial y} F_q\right] = [F_q]_y + \bar{q}\,[F_q]_z, \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial x} F_p\right] = [F_p]_x + \bar{p}\,[F_p]_z, \end{cases}$$

also geht (15) über in

$$(17) \qquad [f]_z - \bar{p}_z[f_p] - \bar{q}_z[f_q] - \bar{p}[F_p]_z - \bar{q}[F_q]_z - [F_p]_x - [F_q]_y = 0,$$

oder

$$(17') \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left\{[f] - \bar{p}[f_p] - \bar{q}\,[f_q] + \int\limits_{\bar{z}(x,y)}^{z} [\bar{p}\,[\omega_y]_z - \bar{q}\,[\omega_x]_z]\,dz\right\} - \frac{\partial}{\partial x}[F_p] - \frac{\partial}{\partial y}[F_q] = 0.$$

Über $\bar{z}(x, y)$ wird später verfügt. (17′) ist die Differentialgleichung der Gefällfunktionen; denn wenn $\bar{p}, \bar{q}$ Gefällfunktionen sind, so gilt (17′); umgekehrt, wenn zwei Funktionen $\bar{p}(x, y, z)$, $\bar{q}(x, y, z)$ der Gleichung (17′) genügen und $z = \varphi(x, y; \alpha)$ eine einpara-

[5]) Natürlich $\omega = \omega(x, y; \alpha)$; ich bezeichne $\omega(x, y; \alpha_0) = \omega_0$.

metrige Lösungsschar des Systems $\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q$ ist, so geht (17') für $z=\varphi(x,y;\alpha)$ in (15) über, also ist $z=\varphi(x,y;\alpha)$ eine einparametrige Extremalenschar.

(17') legt den folgenden Satz nahe:

Satz 7. *Äquivalent damit, daß $I[z(x,y)]$ für alle in R liegende, im abgeschlossenen Gebiet G einmal stetig differenzierbare $z=z(x,y)$ lediglich von den z-Werten entlang C abhängt, ist, daß in R gilt:*

$$f=L(x,y,z)+pM(x,y,z)+qN(x,y,z);\quad L_z-M_x-N_y=0.$$

Der Beweis dieses Satzes ist vollkommen analog dem auf S. 659 bei B und wird hier deshalb übergangen. Setze ich

$$(18)\quad \begin{aligned}\Phi(x,y,z,p,q)&=[f-pf_p-qf_q]+p[F_p]+q[F_q]+\\&+\int\limits_{\bar z(x,y)}^{z}[\bar p[\omega_y]_z-\bar q[\omega_x]_z]\,dz,\end{aligned}$$

so gilt gemäß Satz 7 für alle in F_k liegende, im abgeschlossenen Gebiet einmal stetig differenzierbare $z=\bar z(x,y)$ der

Satz 8. *Das Integral*

$$(19)\quad \iint\limits_G \Phi(x,y,\bar z,\bar z_x,\bar z_y)\,dx\,dy=\iint\limits_G \Phi^*(x,y,\bar z,\bar z_x,\bar z_y)\,dx\,dy$$

hängt für die genannten $\bar z$ nur von den $\bar z$-Werten entlang ζ ab; dabei ist

$$(18')\quad \begin{aligned}&\Phi^*(x,y,\bar z,\bar z_x,\bar z_y)=\\&=\{[f-pf_p-qf_q]+p[F_p]+q[F_q]\}_{z=\bar z,\,p=\bar z_x,\,q=\bar z_y}.\end{aligned}$$

Satz 8 ist das Analogon des BELTRAMI—HILBERTschen Unabhängigkeitssatzes von B, S. 108.

Für $\bar z=\varphi(x,y;\alpha)$ ist ersichtlich

$$(18'')\quad \Phi^*=f(x,y,\varphi,\varphi_x,\varphi_y)-\varphi_x\omega_y+\varphi_y\omega_x.$$

Zusatz. *Wenn z längs C mit einer Feldextremalen $z=\varphi(x,y;\alpha)$ übereinstimmt, so ist*

$$(19')\quad \begin{aligned}&\iint\limits_G \Phi^*(x,y,\bar z,\bar z_x,\bar z_y)\,dx\,dy-\\&-\iint\limits_G\Big\{\int\limits_{\bar z(x,y)}^{z_0(x,y)}[\bar p[\omega_y]_z-\bar q[\omega_x]_z]\,dz\Big\}\,dx\,dy=\\&=\iint\limits_G\big\{f(x,y,\varphi,\varphi_x,\varphi_y)-\varphi_x\omega_y+\varphi_y\omega_x\big\}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Jetzt betrachte ich zulässige $\bar{z} = z(x, y)$, die in F_k liegen. Gemäß dem Zusatze ist dann

$$
(20) \quad \begin{aligned} I[z_0(x,y)] &= \iint_G \left\{ \Phi^*(x,y,\bar{z},\bar{z}_x,\bar{z}_y) + (z_{0x}\omega_{0y} - z_{0y}\omega_{0x}) \right\} dx\,dy - \\ &- \iint_G \left\{ \int_{\bar{z}(x,y)}^{z_0(x,y)} [\bar{p}[\omega_x]_z - \bar{q}[\omega_x]_z] \, dz \right\} dx\,dy, \end{aligned}
$$

also

$$
(21) \quad \begin{aligned} I[\bar{z}(x,y)] - I[z_0(x,y)] = \iint_G \Big\{ &- \Phi^*(x,y,\bar{z},\bar{z}_x,\bar{z}_y) + \\ &+ \int_{\bar{z}(x,y)}^{z_0(x,y)} [\bar{p}[\omega_y]_z - \bar{q}[\omega_x]_z] \, dz + \\ &+ f(x,y,\bar{z},\bar{z}_x,\bar{z}_y) + (-z_{0x}\omega_{0y} + z_{0y}\omega_{0x}) \Big\} dx\,dy. \end{aligned}
$$

Ich bezeichne jetzt

$$
(22) \quad \begin{aligned} \mathsf{E}(x,y,z,\bar{p},\bar{q},p,q) &= \\ = f(x,y,z,p,q) &- f(x,y,z,\bar{p},\bar{q}) + (\bar{p}-p) f_p(x,y,z,\bar{p},\bar{q}) + \\ &+ (\bar{q}-q) f_q(x,y,z,\bar{p},\bar{q}) + (p[\omega_y] - q[\omega_x]) + \\ &+ (-p\omega_{0y} + q\omega_{0x}) + \int_{\bar{z}(x,y)}^{z_0(x,y)} [\bar{p}[\omega_y]_z - \bar{q}[\omega_x]_z] \, dz. \end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung von (21) gilt demnach

$$
(23) \quad I[\bar{z}(x,y)] - I[z_0(x,y)] = \iint_G \mathsf{E}(x,y,\bar{z},\bar{p},\bar{q},\bar{z}_x,\bar{z}_y) \, dx\,dy.
$$

(23) stellt das Analogon des WEIERSTRASZschen Fundamentalsatzes (B, S. 110) dar. Jetzt beweise ich

Satz 9. *Wenn man* $(p^0, q^0) \neq (0,0)$ *so angeben kann, daß*

$$
(24) \quad \mathsf{E}(x,y,z_0,z_{0x},z_{0y},p^0,q^0) < 0
$$

für ein inneres (x^0, y^0) *von* G, *so kann*

$$
I[z(x,y)] - I[z^0(x,y)] < 0
$$

erreicht werden, sofern es eine einmal stetig differenzierbare Lösung $z = \bar{z}(x,y)$ *des Systems* (V):

$$
(\mathrm{V}) \quad \begin{cases} 2\bar{f}_{zp}(\bar{z}-z_0) + \bar{f}_{pp}(\bar{z}-z_0)_x + \bar{f}_{pq}(\bar{z}-z_0)_y - (\bar{z}-z_0)\Omega_{5y} = \omega_5(\bar{z}-z_0)_y \\ 2\bar{f}_{zq}(\bar{z}-z_0) + \bar{f}_{pq}(\bar{z}-z_0)_x + \bar{f}_{qq}(\bar{z}-z_0)_y - (\bar{z}-z_0)\Omega_{5x} = -\omega_5(\bar{z}-z_0)_x \\ \bar{f}_{zz} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \Omega_{5xy} = 0 \end{cases}
$$

gibt, wo ω_5 *eine stetige und* Ω_5 *eine stetig gemischt differenzierbare Hilfsfunktion in* G *ist, derart, daß*

1^0 $\bar z = z_0$ längs einer (x^0, y^0) umgebenden, in G liegenden Kurve L vom selben Charakter wie C ist,

2^0 im Innern I von L, sowie auf L, (24) für $z = z_0(x, y)$ gilt. In I sei $\bar z$ nicht mit z_0 identisch.[6])

B e w e i s. Ich betrachte die Ebenen

$$\varepsilon(\alpha) = p_1^0 x + q_1^0 y + \alpha,$$

wo $p_1^0 = -z_{0x}(x^0, y^0) + p^0$, $q_1^0 = -z_{0y}(x^0, y^0) + q^0$ ist und wähle $\alpha = \alpha^0$ so, daß $\varepsilon(\alpha^0)$ I in einer Strecke s und die Fläche $z = \bar z - z_0$ über I in einem Bogen T trifft, der nicht ganz in I liegt. s teilt I in I_1 und I_2, T liege über I_1; α^0 sei dazu noch so gewählt, daß auf dem von s und T begrenzten Stück ε_1 von $\varepsilon(\alpha^0)$ für $z = p_1^0 x + q_1^0 y + \alpha^0$

$$\mathsf{E}(x, y, z_0 + z, \bar p, \bar q, p^0, q^0) < 0$$

gilt. I_1 wird durch die z-Projektion T_1 von T in I_3 und $I - I_3$ geteilt. ε_1 liege über I_3. Jetzt wähle ich $z = z(x, y)$ so:

$$(25)\qquad \begin{cases} z(x, y) = z_0 + p_1^0 x + q_1^0 y + \alpha_0 & \text{in } I_3, \\ z(x, y) = z_0 & \text{in } G - I_1, \\ z(x, y) = \bar z(x, y) & \text{in } I_1 - I_3. \end{cases}$$

Daß ich α^0 so wählen kann, daß $z(x, y)$ der ϱ-Nachbarschaft von z_0 angehört, ist klar.

Gemäß dem TAYLORschen Satze gilt nun

$$(26)\qquad \begin{aligned} f(x, y, z, z_x, z_y) - f^0 = f_z^0 (z - z_0) + f_p^0 (z - z_0)_x + f_q^0 (z - z_0)_y + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \bar f_{zz} (z - z_0)^2 + \ldots + \bar f_{qq} (z - z_0)_y \right\}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der ersten notwendigen Bedingung ist

$$(27)\qquad \iint_G \{f - f^0\}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \iint_G \left\{ \bar f_{zz} (z - z_0)^2 + \ldots + \bar f_{qq} (z - z_0)_y^2 \right\} dx\, dy.$$

Durch eine leichte Umformung erkennt man, wegen der Voraussetzung über System (V),

$$(28)\qquad \iint_{I - I_3} \{ f(x, y, \bar z, \bar z_x, \bar z_y) - f^0 \}\, dx\, dy = 0.$$

Für das in (25) definierte $z(x, y)$ ist also

$$(29)\qquad \iint_G \{f - f^0\}\, dx\, dy = \iint_{I_3} \mathsf{E}(x, y, z, \bar p, \bar q, z_x, z_y)\, dx\, dy < 0,$$

---

[6]) Die Bedeutung von $\bar f_{zz}$ usw. entnimmt man aus der TAYLORschen Entwicklung von $f(x, y, \bar z, \bar z_x, \bar z_y) - f(x, y, z_0, z_{0x}, z_{0y})$.

d. h.

$$I[z(x,y)] - I[z_0(x,y)] < 0.$$

Die längs s und T_1 auftretenden Unstetigkeiten der ersten Ableitungen von $z(x,y)$ lassen sich durch Abrundung beseitigen, sodaß $z(x,y)$ zulässig wird und (29) erhalten bleibt, w. z. b. w.

Unter den angegebenen Voraussetzungen über F_k und System (V) gilt dann der

Satz 10. *Die vierte notwendige Bedingung für* (1) *fordert, daß in G*

$$\mathrm{E}(x, y, z_0, z_{0x}, z_{0y}, p, q) \geqq 0$$

für alle endlichen p, q. Dabei ist

$$\begin{aligned}(30)\quad \mathrm{E}(x, y, z_0, z_{0x}, z_{0y}, p, q) &= f(x, y, z_0, p, q) - f(x, y, z_0, z_{0x}, z_{0y}) + \\ &+ (z_{0x} - p) f_p^0 + (z_{0y} - q) f_q^0.\end{aligned}$$

Daraus folgt der

Satz 11. *Die vierte notwendige Bedingung kann auch so geschrieben werden:*

$$(31)\quad \bar{f}_{pp}(p - z_{0x})^2 + 2\bar{f}_{pq}(q - z_{0x})(p - z_{0y}) + \bar{f}_{qq}(q - z_{0y})^2 \geqq 0,$$

wobei $\bar{f}_{pp}$ *usw. sich aus* (27) *ergeben, wenn im rechten Integranden* $z = z_0$, $z_x = p$, $z_y = q$ *gesetzt wird.*

Satz 11 erhält man, lediglich unter den Voraussetzungen über System (V), wenn man von (27) ausgeht und zum Beweis von Satz 11 im Beweis von Satz 9 statt $\mathrm{E}(x, y, z_0, z_{0x}, z_{0y}, p, q)$ die linke Seite von (31) setzt. Aus (31) folgt dann wieder über (30) die vierte notwendige Bedingung des Satzes 10; also gilt der

Satz 12. *Es gilt sogar die vierte notwendige Bedingung lediglich unter den Voraussetzungen über System* (V).

Aus (31) folgt wieder die zweite notwendige Bedingung.

Im folgenden **§ 4.** benutze ich die Beziehung (27) zur Herleitung einer fünften notwendigen Bedingung.

§ 4.

8. Ich setze die vier ersten notwendigen Bedingungen als erfüllt voraus. Es soll sein

$$(1)\quad \iint_G \{f - f^0\}\, dx\, dy \geqq 0$$

für alle zulässigen $z(x,y)$. Dafür gilt nach (27)

$$(32)\quad \iint_G \{\bar{f}_{zz}(z - z_0)^2 + \ldots + \bar{f}_{qq}(z - z_0)_y^2\}\, dx\, dy \geqq 0.$$

9. Reguläre Variationsprobleme. Für reguläre Variationsprobleme

$$f = f(x, y, p, q), \quad f_{pp} > 0,$$

folgt aus (32), daß hier die erste notwendige Bedingung für ein absolutes Minimum hinreicht. Die betreffenden Ergebnisse von H II ergeben sich hier also ohne besonderen Beweis.

10. Eine fünfte notwendige Bedingung. Ich lege die Voraussetzungen von **8.** zugrunde. Dann muß im Sinne des Satzes 9 (§ 3)

$$(37) \quad \iint_{I_3} \left\{ \bar{f}_{zz} (z - z_0)^2 + \ldots + \bar{f}_{qq} q_1^{0\,2} \right\} dx\, dy \geqq 0 \quad \text{für } z = z(x, y)$$

sein.

Ich darf dann, weil jedem Punkt von ε_1 eindeutig und stetig ein z zugeordnet ist, schreiben:

$$(38) \quad \iint_{\varepsilon_1} \left\{ \bar{f}_{zz} (z - z_0)^2 + \ldots + \bar{f}_{qq} q_1^{0\,2} \right\} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 + p_1^{0\,2} + q_1^{0\,2}}} \geqq 0.$$

Nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt also

$$(39) \quad \frac{\left\{ \bar{f}_{zz} (z - z_0)^2 + \ldots + \bar{f}_{qq} q_1^{0\,2} \right\}}{\sqrt{1 + p_1^{0\,2} + q_1^{0\,2}}} \geqq 0,$$

wo in (39) $x = \xi$, $y = \eta$, $z = p_1^0 \xi + q_1^0 \eta + \alpha^0 + z_0(\xi, \eta)$ zu setzen ist, wobei $x = \xi$, $y = \eta$ einen gewissen Punkt von I_3 bedeutet. Daraus folgt, daß

$$(40) \quad \lim_{\substack{p_1^0 \to \infty \\ q_1^0 \to \infty}} \frac{\bar{f}_{zz} I^2 + \ldots + \bar{f}_{qq} q_1^{0\,2}}{\sqrt{1 + p_1^{0\,2} + p_1^{0\,2}}} \geqq 0$$

sein muß, wenn z. B. $\bar{f}_{zz} = f_{zz}(\xi, \eta, z_0 + \theta_1 \zeta, z_{0x} + \theta_2 p_1^0, z_{0y} + \theta_3 q_1^0)$ ist und jetzt $x = \xi$, $y = \eta$ einen Punkt von s bedeutet. Außerdem ist

$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3$$

und

$$0 < |\zeta| < |\bar{z}(\xi, \eta) - z_0(\xi, \eta)|.$$

Aus (40) ergibt sich der

Satz 13. *Die fünfte notwendige Bedingung für* (1) *fordert, daß* (40) *in dem angegebenen Sinne gilt.*

Literaturverzeichnis.

O. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Leipzig, 1909), angegeben als B.

A. Haar, Über die Variation der Doppelintegrale, *Crelles Journal*, **149** (1919), S. 1—18, angegeben als H I.

A. Haar, Über reguläre Variationsprobleme, *diese Acta*, **3** (1927), S. 224—234, angegeben als H II.

A. Haar, Zur Variationsrechnung, *Abhandlungen aus dem math. Seminar Hamburg*, **8** (1930—31), S. 1—27, angegeben als H III.

T. Radó, Bemerkung über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme, *diese Acta*, **2** (1924—26), S. 147—156, angegeben als R.

J. Schauder, Über die Umkehrung eines Satzes aus der Variationsrechnung, *diese Acta*, **4** (1928—29), S. 38—50, angegeben als Sch.

(*Eingegangen am 8. Mai 1931, Zusätze am 4. November 1931.*)