# Die Irreduzibilität einer Determinante der analytischen Geometrie.

Von JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

**1. Einleitung.** Es bedeute $D$ die bekannte Determinante, deren Verschwinden die Bedingung dafür ist, daß man durch $M = \binom{m+n}{n}$ gegebene Punkte des $n$-dimensionalen projektiven Raumes eine algebraische Hyperfläche $m$-ter Ordnung legen könne (also im Falle $n = 2$ eine ebene algebraische Kurve, im Falle $n = 3$ eine algebraische Fläche von der besagten Ordnung). Bereits MORITZ REISS[1]) versuchte zu beweisen, daß $D$ eine *irreduzible* rationale ganze Funktion der Koordinaten der $M$ Punkte ist. Aus seinen Erörterungen ist aber die Irreduzibilität von $D$ nicht klar ersichtlich. Im Folgenden soll die Irreduzibilität von $D$ ausführlich dargelegt werden. Dabei beschränke ich mich auf den Fall $n = 2$, also auf ebene Kurven. Diese Beschränkung ist aber unwesentlich, denn meine Überlegungen gelten auch für $n > 2$.

**2. Bezeichnungen.** Die Gleichung einer algebraischen Kurve $m$-ter Ordnung hat die Gestalt

$$F = A^{(1)}U_1 + A^{(2)}U_2 + \ldots + A^{(M)}U_M = 0 \tag{1}$$

wo $U_1, U_2, \ldots, U_M$ die $M = \binom{m+2}{2}$ Potenzprodukte $m$-ter Ordnung der homogenen Punktkoordinaten $x, y, z$ bedeuten und $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(M)}$ konstante Koeffizienten sind. (Als Koordinaten und Koeffizienten erlauben wir beliebige komplexe Zahlen, nur dürfen weder die Koordinaten eines Punktes, noch die Koeffizienten einer Gleichung (1) sämtlich gleich Null sein.)

Zwei Gleichungen (1) definieren dann und nur dann dieselbe Kurve $m$-ter Ordnung, wenn in beiden das Verhältnis der

[1]) M. REISS, Analytisch-geometrische Studien, § 1, *Math. Annalen*, 2 (1870), S. 385—388.

Koeffizienten $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(M)}$ dasselbe ist. (In diesem Sinne definieren $xy^2=0$ und $x^2y=0$ zwei *verschiedene* Linien dritter Ordnung, obzwar beide Linien aus den Geraden $x=0$ und $y=0$ bestehen. Der Unterschied besteht darin, daß einmal die Gerade $y=0$, das andermal die Gerade $x=0$ doppelt gezählt wird.)

Soll die Kurve $F=0$ durch die $\mu$ Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ hindurchgehen, so müssen $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(M)}$ das Gleichungssystem

$$A^{(1)}U_{r1}+A^{(2)}U_{r2}+\ldots+A^{(M)}U_{rM}=0 \tag{2}$$
$$(r=1,2,\ldots,\mu)$$

befriedigen, wo $U_{r1}, U_{r2}, \ldots, U_{rM}$ die Potenzprodukte $m$-ter Ordnung der Koordinaten $x_r, y_r, z_r$ von $P_r$ bedeuten. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \ldots & U_{1M} \\ U_{21} & U_{22} & \ldots & U_{2M} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & \ldots & U_{\mu M} \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir zur Abkürzung durch $[\mu]$.

Durch $M-1$ Punkte geht immer *wenigstens eine* Kurve $m$-ter Ordnung; *nur eine* dann, wenn $[M-1]$ den Rang $M-1$ hat. Die linke Seite der Gleichung $F=0$ dieser einzigen Kurve unterscheidet sich höchstens durch einen konstanten Faktor von der Determinante

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \ldots & U_{1M} \\ U_{21} & U_{22} & \ldots & U_{2M} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ U_{M-1,1} & U_{M-1,2} & \ldots & U_{M-1,M} \\ U_1 & U_2 & \ldots & U_M \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Durch $M$ gegebene Punkte kann man dann und nur dann wenigstens eine Kurve $m$-ter Ordnung legen, wenn die Determinante

$$D=|U_{rs}| \quad (r,s=1,2,\ldots,M) \tag{4}$$

gleich Null ist.

Von dieser Determinante $D$ soll bewiesen werden, daß sie eine *irreduzible* rationale ganze Funktion von

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots;\ x_M, y_M, z_M \tag{5}$$

ist.

**3. Hilfssätze.** $\alpha$) *Bedeutet $\varDelta$ einen Minor der Determinante $D$ oder diese Determinante selbst, so sind die Glieder der Determinante $\varDelta$ — vom Vorzeichen abgesehen — Potenzprodukte der Größen* (5) *und zwar lauter verschiedene Potenzprodukte.*

Mit anderen Worten: *Die Entwicklung von $\varDelta$ als einer Determinante und ihre Entwicklung nach den Potenzprodukten der Größen* (5) *sind gliedweise identisch.*

Bei dem Beweise dürfen und wollen wir die Bezeichnung so wählen, daß

$$\varDelta = |U_{rs}| \quad (r, s = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{6}$$

ist, wo $\mu$ den Grad der Determinante $\varDelta$ bedeutet.

Die *Glieder* dieser Determinante sind die Produkte von der Gestalt $\pm U_{1a} U_{2b} \ldots U_{\mu v}$, wo $a, b, \ldots, v$ eine Permutation von $1, 2, \ldots, \mu$ ist und das Vorzeichen der Cramerschen Regel entspricht. Sie sind — vom Vorzeichen abgesehen — ersichtlich Potenzprodukte der Größen (5).

In den Gliedern

$$H = \pm U_{1a} U_{2b} \ldots V_{\mu v} \text{ und } H' = \pm U_{1a'} U_{2b'} \ldots U_{\mu v'}$$

haben $x_1, y_1, z_1$ dann und nur dann dieselben Exponenten, wenn $a = a'$, denn $U_{2b}, \ldots$ und $U_{2b'}, \ldots$ sind von diesen Koordinaten frei. Sollen alle Größen (5) in $H$ dieselben Exponenten haben als in $H'$, so muß $a = a'$, $b = b', \ldots, v = v'$ sein, also $H$ und $H'$ dasselbe Glied von $\varDelta$ bedeuten.

$\beta$) *Zwei Determinanten $\mu$-ten Grades der Matrix $[\mu]$ — wo $\mu < M$ —, die nicht aus denselben Spalten von $[\mu]$ gebildet sind, enthalten keine ähnlichen Glieder.*

Diesmal bedeute $H = \pm U_{1a} U_{2b} \ldots U_{\mu v}$ ein Glied von

$$S = |U_{rs}| \quad (r = 1, 2, \ldots, \mu;\ s = s_1, s_2, \ldots, s_\mu)$$

und $H' = \pm U_{1a'} U_{2b'} \ldots U_{mv'}$ ein Glied von

$$T = |U_{rt}| \quad (r = 1, 2, \ldots, \mu;\ t = t_1, t_2, \ldots, t_\mu).$$

Soll $H$ zu $H'$ *ähnlich* sein (das heißt, soll jede der Größen (5) in $H$ denselben Exponenten haben als in $H'$), so muß $a = a'$, $b = b', \ldots, v = v'$ sein. Da $a, b, \ldots, v$ eine Permutation von $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ ist, $a', b', \ldots, v'$ aber eine solche von $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$: so besagt dies, daß $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ und $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ sich nur der Reihenfolge nach unterscheiden können. $S$ und $T$ müssen also aus denselben Spalten von $[\mu]$ gebildet sein.

*$\gamma$) Die Determinanten $\mu$-ten Grades von $[\mu]$ sind von einander linear unabhängig.*

Das heißt, zwischen den besagten Determinanten, die wir mit $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ bezeichnen, besteht keine Identität von der Gestalt

$$\lambda_1\Delta_1 + \lambda_2\Delta_2 + \ldots = 0,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Konstanten sind und zwar nicht sämtlich gleich Null.

In der Tat enthalten nach $\beta$)

$$\lambda_1\Delta_1,\ \lambda_2\Delta_2, \ldots$$

keine ähnlichen Glieder, also ist bei ihrer Addition ein Herausfallen von Gliedern ausgeschlossen.

*$\delta$) Hat in der Gleichung $F=0$ einer algebraischen Kurve $m$-ter Ordnung $F$ keine mehrfachen Teiler und ist $\mu < M$: so gibt es auf dieser Kurve sicher $\mu$ solche Punkte, für welche die Matrix $[\mu]$ den Rang $\mu$ hat.*

Für $\mu = 1$ ist der Satz evident, denn

$$U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1M}$$

können nicht alle zugleich Null sein.

Zum Beweise genügt also eine Folgerung von $\mu - 1$ auf $\mu$. Wir nehmen nun an, es sei gelungen auf der Kurve $F=0$ die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{\mu-1}$ so zu bestimmen, daß $[\mu]$ den Rang $\mu$ hat: und werden auf der Kurve die Existenz eines solchen Punktes $P_\mu$ nachweisen, daß für $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ die Matrix $[\mu]$ den Rang $\mu$ hat. Dabei dürfen und wollen wir die Bezeichnung so wählen, daß

$$\Delta = |U_{rs}| \quad (r, s = 1, 2, \ldots, \mu - 1) \tag{7}$$

von Null verschieden ist.

Gebe es zu $P_1, P_2, \ldots, P_{\mu-1}$ auf der Kurve keinen solchen Punkt $P_\mu$, daß $[\mu]$ den Rang $\mu$ erhält: so hieße dies, daß für jeden Punkt $x, y, z$ der Kurve alle Determinanten $\mu$-ten Grades der Matrix

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \ldots & U_{1M} \\ U_{21} & U_{22} & \ldots & U_{2M} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ U_{\mu-1,1} & U_{\mu-1,2} & \ldots & U_{\mu-1,M} \\ U_1 & U_2 & \ldots & U_M \end{pmatrix} \tag{8}$$

gleich Null wären. Dann wären aber diese Determinanten solche rationale ganze Funktionen von $x, y, z$, die durch jeden irreduziblen Faktor von $F$ teilbar sind. Da $F$ keine mehrfache Faktoren hat, müssten diese Determinanten auch durch $F$ teilbar sein.

Die besagten Determinanten sind, ebenso wie $F$, homogene rationale ganze Funktionen $m$-ten Grades von $x, y, z$; sie können also nur so durch $F$ teilbar sein, wenn sie sich von $F$ nur durch konstante Faktoren unterscheiden. Dann darf es aber unter ihnen keine zwei geben, die von Null verschieden sind und sich von einander nicht nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden.

Das trifft aber nicht zu; denn

$$S = \begin{vmatrix} U_{11} & \ldots U_{1,\mu-1} & U_{1s} \\ U_{21} & \ldots U_{2,\mu-1} & U_{2s} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ U_{\mu-1,1} & \ldots U_{\mu-1,\mu-1} & U_{\mu-1,s} \\ U_1 & \ldots U_{\mu-1} & U_s \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} U_{11} & \ldots U_{1,\mu-1} & U_{1t} \\ U_{21} & \ldots U_{2,\mu-1} & U_{2t} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ U_{\mu-1,1} & \ldots U_{\mu-1,\mu-1} & U_{\mu-1,t} \\ U_1 & \ldots U_{\mu-1} & U_t \end{vmatrix}$$

sind *solche* Determinanten der Matrix (8), wenn $s$ und $t$ zwei verschiedene Zahlen der Folge $\mu, \mu+1, \ldots, M$ bedeuten. (Wegen $\mu < M$ enthält diese Folge sicher wenigstens zwei Zahlen.) In der Tat ist weder $S$ noch $T$ gleich Null, denn das Potenzprodukt $U_s$ hat in $S$, und das Potenzprodukt $U_t$ hat in $T$ die von Null verschiedene Determinante (7) zum Koeffizienten. $S$ und $T$ können auch nicht bis auf einen konstanten Faktor einander gleich sein, denn $U_s$ kommt in $S$ vor, in $T$ aber nicht.

**4.** Beweis der Vermutung von Reiss. *a) $D$ kann nicht in das Produkt zweier rationalen ganzen Funktionen ($A$ und $B$) von*

$$x_1, y_1, z_1;\; x_2, y_2, z_2; \ldots;\; x_M, y_M, z_M$$

*in solcher Weise zerlegt werden, daß die Koordinaten gewisser Punkte nur im Faktor $A$, die anderen nur im Faktor $B$ vorkommen.*

Nehmen wir an, es gebe eine solche Zerlegung, bei welcher die Koordinaten von $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ nur in $A$, die Koordinaten der übrigen Punkte nur in $B$ vorkommen. In der nach den Potenzprodukten von $x_M, y_M, z_M$ entwickelten Gestalt von $D$ müsste dann jeder Koeffizient — also jede Determinante $(M-1)$-ten Grades von $[M-1]$ — durch $A$ teilbar sein. Ist $\mu < M-1$, so können desgleichen diese Determinanten nur so durch $A$ teilbar sein, wenn die Determinanten $(M-2)$-ten Grades von $[M-2]$ durch $A$ teilbar sind. Usw. Schließlich müssen dann alle Determinanten $\mu$-ten Grades von $[\mu]$ durch $A$ teilbar sein.

Diese Determinanten $\mu$-ten Grades sind in den Koordinaten jedes $P_r$ $(r \leqq \mu)$ homogen und vom Grade $m$. Auch $A$ ist so beschaffen, denn $D$ hat diese Eigenschaft und in der Zerlegung $D = AB$ ist $B$ von den Koordinaten der besagten Punkte frei. Zufolge dieser Beschaffenheit von $A$ und den Determinanten $\mu$-ten Grades von $[\mu]$ können diese Determinanten nur so durch $A$ teilbar sein, wenn sie sich von $A$ und somit auch von einander nur durch konstante Faktoren unterscheiden. Das widerspricht aber dem Hilfssatze $\gamma$).

*b) $D$ kann auch in solcher Weise nicht in ein Produkt zweier rationalen ganzen Funktionen zerlegt werden, daß die Koordinaten wenigstens eines Punktes in beiden Faktoren vorkommen.*

Gebe es eine Zerlegung $D = AB$, in welcher weder $A$ noch $B$ von $x_M, y_M, z_M$ frei ist, so wären beide Faktoren in $x_M, y_M, z_M$ homogen und ihre Grade in *diesen* Veränderlichen wären $< m$.

Betrachten wir nun eine spezielle Kurve $F = 0$ von der $m$-ten Ordnung, in deren Gleichung $F$ nicht in Faktoren niedrigeren Grades zerlegbar ist. (Z. B. sei $F = x^{m-1}z + y^m$.) Auf ihr wählen wir $P_1, P_2, \ldots, P_{M-1}$ so, daß $[M-1]$ den Rang $M-1$ erhält, was nach Hilfssatz $\delta$) immer möglich ist. Dann geht außer unserer Kurve keine andere Kurve $m$-ter Ordnung durch die gewählten Punkte. Folglich wird $D$ bis auf einen von Null verschiedenen konstanten Faktor in das Polynom $F$ übergehen, wenn wir für

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots;\ x_{M-1}, y_{M-1}, z_{M-1}$$

die Koordinaten der auf $F = 0$ gewählten Punkte einsetzen, für $x_M, y_M, z_M$ aber die Veränderlichen $x, y, z$. Diese Substitution führt also die Zerlegung $D = AB$ in eine solche Zerlegung $F = \bar{A}\bar{B}$ über, in welcher $\bar{A}$ und $\bar{B}$ solche homogene rationale Funktionen von $x, y, z$ allein sind, deren Grade $< m$ sind. Das widerspricht aber der Unzerlegbarkeit von $F$.

Bemerkung. Wie wir bereits in der Einleitung bemerkten, lassen sich unsere Untersuchungen auch auf den Raum von 3 oder mehreren Dimensionen übertragen. Mit Ausnahme des Satzes $b$) kann alles auch auf die Gerade, also auf das binäre Gebiet übertragen werden, ist aber in diesem Falle trivial. Daß Satz $b$) im binären Gebiete nicht giltig ist (sondern durch den Vandermondeschen Determinantensatz zu ersetzen ist), folgt aus dem Umstande, daß jede rationale ganze Funktion von zwei Veränderlichen in lineare Faktoren zerlegbar ist.

*(Eingegangen am 3. April 1932.)*