Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimal- und Extremalpolynome.[1])

Von JULIUS V. SZ. NAGY in Szeged.

§ 1. Einleitung. Formulierung der Sätze.

1. Die vorliegende Arbeit schließt sich eng an eine Arbeit[2]) von L. FEJÉR und eine gemeinsame Arbeit[3]) von M. FEKETE und J. L. v. NEUMANN an.

Wir bezeichnen im Folgenden mit P stets *eine entweder aus endlichvielen Punkten bestehende, oder eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge in der komplexen Ebene, mit p einen beliebigen Punkt dieser Punktmenge P.*

Wir betrachten die Gesamtheit der Polynome n-ten Grades von der Form

(1) $$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

wo die Koeffizienten beliebige komplexe Zahlen sind. Wir ordnen auf eine bestimmte Weise einem Polynom $A(z)$ in jedem Punkte p von P je eine nichtnegative reelle Zahl zu, welche *die Abweichung* (von der Null) *des Polynoms $A(z)$ im Punkte p* genannt werden soll. Das Maximum der Abweichungen in den Punkten p von P wird *die Abweichung des Polynoms auf der Punktmenge P* genannt.

---

[1]) Diese Arbeit wurde am 13. Juni 1932 der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

[2]) L. FEJÉR, Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen, *Math. Annalen*, **85** (1922), S. 41–48.

[3]) M. FEKETE und J. L. v. NEUMANN, Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **31** (1922), S. 125–138.

Die Abweichung des Polynoms $A(z)$ im Punkte p bzw. auf P wird im Folgenden mit

$$D(p)\{A(z)\} \quad \text{bzw.} \quad D(P)\{A(z)\}$$

bezeichnet werden.

Die Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ ist *monoton*, wenn für zwei beliebige Polynome $A_1(z)$ und $A_2(z)$ n-ten Grades von der Form (1) in irgendeinem Punkte p von P

$$D(p)\{A_1(z)\} > D(p)\{A_2(z)\}, \ D(p)\{A_1(z)\} < D(p)\{A_2(z)\} \\ \text{bzw. } D(p)\{A_1(z)\} = D(p)\{A_2(z)\} \tag{2}$$

ist, je nachdem

$$|A_1(p)| > |A_2(p)|, \ |A_1(p)| < |A_2(p)| \text{ bzw. } |A_1(p)| = |A_2(p)| \tag{3}$$

ist.

Die Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ ist stetig, wenn $D(p)\{A_1(z)\}$ und $D(p)\{A_2(z)\}$ in irgendeinem Punkte p von P, wo der Unterschied zwischen $|A_1(p)|$ und $|A_2(p)|$ hinreichend klein ist, beliebig wenig voneinander abweichen.

Die am einfachsten definierbare Abweichung ist die sogenannte Tschebyscheffsche Abweichung, die sich durch die Gleichungen

$$D(p)\{A(z)\} = |A(p)|, \ D(P)\{A(z)\} = \operatorname{Max}|A(p)| \tag{4}$$

definieren läßt. Diese Abweichung ist stetig, monoton, nichtnegativ und verschwindet in den Nullstellen und nur in den Nullstellen von $A(z)$. Eine Abweichung mit diesen vier Eigenschaften soll als eine *normale Abweichung* bezeichnet werden.

Man kann verschiedene Abweichungen $D(P)\{A(z)\}$ definieren, ohne die Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ definieren zu müssen.[4]) Die Monotonität der nur auf der ganzen Menge P definierten Abweichung läßt sich auf Grund des Begriffes Unterpolynom und Oberpolynom definieren.

---

[4]) Vgl. die Arbeit von FEJÉR (a. a. O. [2])) und die folgenden zwei Arbeiten:

G. SZEGŐ, Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören, *Math. Zeitschrift*, 9 (1921), S. 218–270;

CH. JORDAN, Sur une série de polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés, *Proceedings of the London Math. Soc.*, (2) 20 (1922), S. 297–325.

Nach FEKETE und V. NEUMANN ist ein Polynom $A_2(z)$ (von der Form (1)) ein *Unterpolynom* von $A_1(z)$ (von der Form (1)) auf P, wenn in jedem Punkte p von P, wo $A_1(p) \neq 0$ bzw. $A_1(p) = 0$ ist, $|A_2(p)| < |A_1(p)|$ bzw. $A_2(p) = 0$ ist. Das Polynom $A_1(z)$ ist in diesem Falle ein *Oberpolynom* von $A_2(z)$ auf P.

Eine Abweichung $D(P)\{A(z)\}$ ist auf P *monoton*, wenn für je zwei Polynome $A_1(z)$ und $A_2(z)$, von denen $A_2(z)$ ein Unterpolynom von $A_1(z)$ ist, $D(P)\{A_1(z)\} > D(P)\{A_2(z)\}$ ist.

Eine monotone Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ bestimmt offenbar auf der Punktmenge P eine monotone Abweichung $D(P)\{A(z)\}$.

2. Diejenigen Polynome von der Form (1), für welche bei einer bestimmten Definition der Abweichung auf der Punktmenge P diese Abweichung möglichst klein ausfällt, werden *Minimalpolynome* genannt. Diejenigen Polynome von der Form (1), die auf P kein Unterpolynom besitzen, werden *Extremalpolynome* genannt.

Es ist klar, daß ein Minimalpolynom auch ein Extremalpolynom ist.

Für jedes Extremalpolynom gilt der Hauptsatz von L. FEJÉR:

Die Nullstellen jedes zu der Menge P gehörigen Extremalpolynoms liegen alle in der konvexen Hülle von P, (insofern der Grad des Polynoms die Anzahl der Punkte von P nicht übersteigt).

Der Hauptsatz von M. FEKETE und J. L. V. NEUMANN lautet, wie folgt:

Ist die Punktmenge P symmetrisch zur reellen Achse und konstruiert man die Kreise, welche die Verbindungsstrecke je zweier zur reellen Achse symmetrisch liegender Punkte von P als Durchmesser besitzen, so liegt jede nichtreelle Nullstelle der zu P gehörigen Extremalpolynome mit reellen Koeffizienten im Innern oder am Rande dieser Kreise (wenn der Grad der Polynome die Anzahl der Punkte von P nicht übersteigt).

3. Im Anschluß an diese Sätze werden wir drei Sätze beweisen:

Ist $A^*(z)$ ein Minimalpolynom normaler Abweichung auf P, dessen Grad kleiner ist, als die Anzahl der Punkte von P, und ist P^* die Menge derjenigen Punkte von P, in denen die gegebene Abweichung von $A^*(z)$ maximal ist, so gelten die folgenden drei Sätze:

I. *Die Nullstellen von $A^*(z)$ liegen alle in der konvexen Hülle von P^*.*

II. *Liegen die Punkte von P alle auf der reellen Achse und ist $A^*(z)$ vom n-ten Grade, so enthält die Menge P^* solche $n+1$ Punkte, die voneinander durch die n reellen Nullstellen des Polynoms $A^*(z)$ getrennt werden.*

III. *Ist die Menge P symmetrisch zur reellen Achse und hat $A^*(z)$ lauter reelle Koeffizienten, so liegt jede nichtreelle Nullstelle von $A^*(z)$ im Innern oder am Rande wenigstens eines der Kreise, welche die Verbindungsstrecke je zweier, in bezug auf die reelle Achse symmetrischer Punkte von P^* als Durchmesser haben.*

Die Sätze I und III gelten auch im Falle, wenn der Grad von $A(z)$ und die Anzahl der Punkte von P übereinstimmen.

Ist $D(p)\{A(z)\} = |A(p)|$ und besteht P aus den Punkten des abgeschlossenen Intervalles $(-1, +1)$, so drückt der Satz II die charakteristische Eigenschaft des bekannten Tschebyscheffschen Polynoms aus.[5])

4. M. Fekete und J. L. v. Neumann haben bewiesen, daß die Ableitung eines Polynoms $f(z)$ von der Form

$$f(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c_1 z^n + c_2 z^{n-1} + \ldots + c_{n+1} \tag{5}$$

mit lauter verschiedenen Nullstellen $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ auf der Menge P dieser Nullstellen ein Minimalpolynom n-ten Grades ist. Die zugehörige normale Abweichung ist

$$D(p_i)\{A(z)\} = \left|\frac{A(p_i)}{f'(p_i)}\right| \tag{6}$$

bzw.

$$D(P)\{A(z)\} = \operatorname{Max}\left|\frac{A(p_i)}{f'(p_i)}\right| \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{6'}$$

Der Fejérsche bzw. der Fekete—Neumannsche Satz enthält also den bekannten Gaußschen bzw. Jensenschen Satz für die Ableitung eines Polynoms.

Auch die folgende spezielle Folgerung eines Satzes von uns[6]) läßt sich für die Extremalpolynome verallgemeinern:

---

[5]) Vgl. E. v. Egerváry, Über die charakterisierenden geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome, *Archiv der Math. und Phys.*, **27** (1918), S. 17—24.

[6]) Julius v. Sz. Nagy, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, **31** (1921), S. 138—151; vgl. insb. S. 150—151.

Sind α_1 und α_2 zwei verschiedene Nullstellen der Ableitung $f'(z)$ eines Polynoms $f(z)$, und ist H eine beliebige gleichseitige Hyperbel, die durch die Punkte α_1 und α_2 hindurchgeht und in dem Halbierungspunkte der Strecke $\alpha_1\alpha_2$ den Mittelpunkt hat, so besitzt das Polynom $f(z)$ entweder an beiden Seiten der Hyperbel H mindestens eine Nullstelle, oder aber es liegen alle Nullstellen von $f(z)$ auf der Hyperbel.

(Die Punkte der Ebene, aus denen zwei verschiedene Tangenten bzw. keine Tangenten an die Hyperbel gehen, liegen in der äußeren bzw. inneren Seite der Hyperbel.)

Für Extremalpolynome beweisen wir den folgenden Satz:

IV. *Sind α_1 und α_2 zwei Nullstellen eines Extremalpolynoms auf P, so kann die ganze Punktmenge P nicht auf einer Seite der gleichseitigen Hyperbel liegen, deren Hauptachse die Verbindungsstrecke $\alpha_1\alpha_2$ ist.*

§ 2. Beweis der Sätze I—III über Minimalpolynome normaler Abweichung.

1. Zum Beweise der Sätze I—III können wir annehmen, daß die Anzahl der Punkte P größer ist, als der Grad des Polynoms $A^*(z)$. Wären nämlich diese zwei Zahlen gleich, so müßten die Nullstellen von $A^*(z)$ mit den Punkten von P offenbar zusammenfallen.

Ist die Anzahl der Punkte von P größer als der Grad n von $A^*(z)$, so gehört keine Nullstelle von $A^*(z)$ der Menge P an. Jede normale Abweichung eines Polynoms n-ten Grades verschwindet nämlich nur in den n Nullstellen des Polynoms. Das Maximum der normalen Abweichung von $A^*(z)$ ist also positiv, weil sie in $n+1$ Punkten nicht verschwinden kann.

2. Zum Beweise des Satzes I nehmen wir an, daß der Satz unrichtig ist: es gibt also eine Punktmenge P, eine normale Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ und ein zugehöriges Minimalpolynom $A^*(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$, dessen Nullstelle α_1 außerhalb der konvexen Hülle von P^* liegt.

Wir werden dann beweisen, daß die Abweichung $D(p)\{A(z)\}$ in der Punktmenge P durch das Polynom $A^*(z)$ nicht minimalisiert sein kann, weil es dann ein Polynom n-ten Grades von der Form

$$(7)\qquad B(z)=\frac{A^*(z)}{z-\alpha_1}(z-\beta_1)=(z-\beta_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$$

gäbe, für das die Ungleichung

$$(8)\qquad D(P)\{B(z)\}<D(P)\{A^*(z)\}=\operatorname{Max} D(p)\{A^*(z)\}$$

bestände. Das Polynom $A^*(z)$ wäre also kein Minimalpolynom normaler Abweichung.

Liegt nämlich α_1 außerhalb der konvexen Hülle von P^*, so gibt es eine Gerade g, die den Punkt α_1 und die konvexe Hülle von P^* voneinander trennt. Wir bezeichnen mit γ den Fußpunkt der aus α_1 auf g gefällten Senkrechten, mit β_1 einen inneren Punkt der Strecke (α_1, γ), ferner mit P_1 (bzw. P_2) die abgeschlossene Menge, gebildet aus denjenigen Punkten von P, welche auf der Geraden g und an derselben (bzw. an der entgegengesetzten) Seite der Geraden g liegen, wie die Menge P^*.

Es ist klar, daß für jeden Punkt p_1 von P_1 $|p_1-\beta_1|<|p_1-\alpha_1|$ ist und daher, daß in jedem Punkte p_1, wo $A^*(z)$ nicht verschwindet,

$$|B(p_1)|=\left|\frac{A^*(p_1)}{p_1-\alpha_1}(p_1-\beta_1)\right|<|A^*(p_1)|$$

ist.

Wegen der Monotonität der normalen Abweichungen folgt daraus die Ungleichung

$$(9)\qquad D(P_1)\{B(z)\}<D(P_1)\{A^*(z)\}=D(P)\{A^*(z)\}.$$

Die Punktmenge P_2 enthält keinen Punkt von P^*; es gilt also die Ungleichung

$$(10)\qquad D(P_2)\{A^*(z)\}<D(P)\{A^*(z)\}=D(P_1)\{A^*(z)\}.$$

Wegen der Stetigkeit der normalen Abweichungen kann man den Punkt β_1 innerhalb der Strecke (α_1, γ) dem Punkte α_1 so nahe wählen, daß auch die Ungleichung

$$(11)\qquad D(P_2)\{B(z)\}<D(P)\{A^*(z)\}$$

statthat. Aus den Ungleichungen (9) und (11) folgt die Ungleichung (8). Damit ist der Satz I bewiesen.

3. Ist $A^*(z)$ ein dem Satze II entsprechendes Minimalpolynom n-ten Grades, so liegen nach dem Satze I seine Nullstellen auf der Strecke, die von den äußersten Punkten der Menge P^* begrenzt wird. Für den Beweis des Satzes II müssen wir nur zeigen, daß auf der reellen Achse zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $A^*(z)$ wenigstens ein Punkt von P^* liegt.

Nehmen wir an, daß es zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen α_k und α_{k+1} ($\alpha_k \leqq \alpha_{k+1}$) von $A^*(z)$ keinen Punkt von P^* gibt. Die Punkte α_k und α_{k+1} können der Punktmenge P^* nicht angehören, weil die Anzahl der Punkte von P mindestens $n+1$, und deshalb $D(P)\{A^*(z)\} > 0$ ist. Man kann daher die Strecke (α_k, α_{k+1}) in beiden Richtungen um eine genügend kleine Strecke von der Länge $\varepsilon\,(>0)$ so verlängern, daß auch die Strecke $(\alpha_k - \varepsilon, \alpha_{k+1} + \varepsilon)$ keinen Punkt P^* enthält.

Bezeichnet P_2 (bzw. P_1) die abgeschlossene Menge derjenigen Punkte p_2 (bzw. p_1) von P, die im abgeschlossenen inneren endlichen (bzw. äußeren unendlichen) Intervalle $(\alpha_k - \varepsilon, \alpha_{k+1} + \varepsilon)$ liegen, so besteht die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\leqq |(p_1 - \alpha_k + \varepsilon)(p_1 - \alpha_{k+1} - \varepsilon)| = \\ &= |(p_1 - \alpha_k)(p_1 - \alpha_{k+1}) - \varepsilon(\alpha_{k+1} - \alpha_k + \varepsilon)| < \\ &< |(p_1 - \alpha_k)(p_1 - \alpha_{k+1})|. \end{aligned}$$

Ist also

$$B(z) = \frac{A^*(z)}{(z-\alpha_k)(z-\alpha_{k+1})}(z - \alpha_k + \varepsilon)(z - \alpha_{k+1} - \varepsilon),$$

so besteht die Ungleichung $|B(p_1)| < |A^*(p_1)|$ für jeden Punkt p_1 von P_1, wo $A^*(z)$ nicht verschwindet. Daraus folgt die Ungleichung

$$(12) \qquad D(P_1)\{B(z)\} < D(P_1)\{A^*(z)\} = D(P)\{A^*(z)\} \neq 0.$$

Das (innere) Intervall $(\alpha_k - \varepsilon, \alpha_{k+1} + \varepsilon)$ enthält keinen Punkt von P^*, daraus folgt die Ungleichung

$$D(P_2)\{A^*(z)\} < D(P)\{A^*(z)\}.$$

Wegen der Stetigkeit der normalen Abweichungen läßt sich die Zahl ε so klein wählen, daß auch die Ungleichung

$$(13) \qquad D(P_2)\{B(z)\} < D(P)\{A^*(z)\}$$

statthat. Das Polynom $A^*(z)$ ist daher nach den Ungleichungen (12) und (13) kein Minimalpolynom.

Aus diesem Widerspruch folgt, daß das Intervall $(\alpha_k - \varepsilon, \alpha_{k+1} + \varepsilon)$ mindestens eine Nullstelle von $A^*(z)$ enthält und $\alpha_k \neq \alpha_{k+1}$ ist, weil die Punkte von P^* keine Nullstellen von $A^*(z)$ sind. Damit ist der Satz II bewiesen. Aus diesem Satze folgt der Satz:

Die Abweichung eines Minimalpolynoms n-ten Grades, das eine normale Abweichung auf einer in der reellen Achse liegen-

den Punktmenge P minimalisiert, nimmt ihren Maximalwert mindestens in $n+1$ Punkten von P an, (insofern nur die Anzahl der Punkte von P größer als n ist).

4. Wäre nun der Satz III unrichtig, so gäbe es ein Minimalpolynom mit reellen Koeffizienten, das eine normale Abweichung auf einer zur reellen Achse symmetrisch liegenden Punktmenge P minimalisiert und dessen konjugiert komplexe Nullstellen α und $\bar{\alpha}$ außerhalb der sämtlichen im Satze III konstruierten Kreise K^* liegen.

Ist γ ein dem Punkte α näher liegender Punkt der Strecke $(\alpha, \bar{\alpha})$, welcher noch außerhalb aller Kreise K^* liegt, so konstruieren wir durch den Punkt γ alle Kreise K_γ, die mit den Kreisen K^* konzentrisch sind. Wir bezeichnen mit P_1 die Teilmenge derjenigen Punkte von P, die am Rande oder im Innern wenigstens eines der Kreise K_γ liegen, mit P_2 die Teilmenge der übrigen und der auf den Kreisen K_γ liegenden Punkte von P, endlich mit β bzw. $\bar{\beta}$ einen inneren Punkt der Strecke (α, γ) bzw. seinen Spiegelpunkt in bezug auf die reelle Achse.

Nach einem geometrischen Hilfssatze von FEKETE und v. NEUMANN[7]) gilt die Ungleichung

$$|(p_1-\beta)(p_1-\bar{\beta})| < |(p_1-\alpha)(p_1-\bar{\alpha})|$$

für jeden Punkt p_1 der Menge P_1. Für jeden Punkt p_1 von P_1, wo $A^*(z)$ nicht verschwindet, besteht also die Ungleichung

$$|B(p_1)| = \left| \frac{A^*(p_1)}{(p_1-\alpha)(p_1-\bar{\alpha})}(p_1-\beta)(p_1-\bar{\beta}) \right| < |A^*(p_1)|.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$D(P_1)\{B(z)\} < D(P_1)\{A^*(z)\} = D(P)\{A^*(z)\}. \tag{14}$$

Auf der Menge P_2 ist

$$D(P_2)\{A^*(z)\} < D(P)\{A^*(z)\};$$

man kann also den Punkt β auf der Strecke (α, γ) dem Punkte α so nahe wählen, daß auch die Ungleichung

$$D(P_2)\{B(z)\} < D(P)\{A^*(z)\} \tag{15}$$

statthat. Aus den Ungleichungen (14) und (15) folgt daher, daß die gegebene normale Abweichung von $A^*(z)$ auf der Menge P nicht minimalisiert wird. Aus diesem Widerspruche folgt die Richtigkeit des Satzes III.

---

7) FEKETE—NEUMANN, a. a. O. 3), S. 130—131.

§ 3. Beweis des Satzes IV über die Extremalpolynome.

Zum Beweise können wir annehmen, daß ein zur Menge P gehöriges Extremalpolynom $A^*(z)$ in den Punkten $-a$ und $+a$ der reellen Achse verschwindet.

1. Wir nehmen zuerst an, daß jeder Punkt $p=u+iv$ von P der inneren Seite der Hyperbel

(16) $$x^2-y^2-a^2=0$$

angehört, d. h. $u^2-v^2-a^2>0$ ist.

Führt man durch jeden Punkt p je eine gleichseitige Hyperbel hindurch, deren Hauptachse in die reelle Achse und deren Mittelpunkt in den Punkt 0 fällt, so besitzen die Längen der Hauptachsen dieser Hyperbeln ein Minimum $2b\,(>2a)$.

Ist also $2c^2=a^2+b^2$, so gehören die Punkte $p=u+iv$ der Punktmenge P alle der inneren Seite der Hyperbel

$$x^2-y^2-c^2=0$$

an, weil $c^2<b^2$ ist. Für jeden Punkt $p=u+iv$ von P gilt also die Ungleichung

$$u^2-v^2-c^2>0.$$

Da

$$|(p-a)(p+a)|^2=|p^2-a^2|^2=(u^2-v^2-a^2)^2+4u^2v^2$$

und

$$|p^2-b^2|^2=(u^2-v^2-b^2)^2+4u^2v^2$$

ist, so gilt für jeden Punkt $p=u+iv$ von P die Gleichung

(17) $$|p^2-b^2|^2-|p^2-a^2|^2=2(a^2-b^2)(u^2-v^2-c^2).$$

Wegen der Ungleichungen

$$u^2-v^2-c^2>0 \text{ und } a^2-b^2<0$$

besteht also für jeden Punkt p die Ungleichung

$$|p^2-b^2|<|p^2-a^2|.$$

Aus dieser Ungleichung folgt, daß das Polynom

(18) $$B(z)=\frac{A^*(z)}{z^2-a^2}(z^2-b^2)$$

auf P ein Unterpolynom von $A^*(z)$ ist. Dies ist aber unmöglich, da $A^*(z)$ auf P ein Extremalpolynom ist.

Aus diesem Widerspruche folgt, daß nicht jeder Punkt von P der inneren Seite der Hyperbel (16) angehören kann.

2. Auf ähnliche Weise beweist man, daß nicht alle Punkte p von P der äußeren Seite der Hyperbel (16) angehören können.

Wäre nämlich jeder Punkt $p = u + iv$ in der äusseren Seite der Hyperbel (16) gelegen, so wäre $u^2 - v^2 - a^2 < 0$.

Wir führen durch jeden Punkt p, der zwischen der Hyperbel (16) und ihren Asymptoten liegt, je eine Hyperbel hindurch, deren Hauptachse in die reelle Achse und deren Mittelpunkt in den Punkt 0 fällt. Die Längen der Hauptachsen dieser Hyperbeln besitzen ein Maximum $2b\,(< 2a)$. (Liegen keine Punkte von P zwischen der Hyperbel (16) und ihren Asymptoten, so ist $2b = 0$.)

Wegen der Ungleichung $2c^2 = a^2 + b^2 < 2b^2$ besteht für jeden Punkt $p = u + iv$ von P die Ungleichung $u^2 - v^2 - c^2 < 0$. Aus der Gleichung (17) folgt daher auch in diesem Falle die Ungleichung

$$|p^2 - b^2| < |p^2 - a^2|,$$

weil $a^2 - b^2 > 0$ ist. Für den so bestimmten Wert von b ist das Polynom (18) auch in diesem Falle ein Unterpolynom von $A^*(z)$ auf P. Aus diesem zweiten Widerspruche folgt die Richtigkeit des Satzes IV.

(Eingegangen am 15. Juni 1932.)