Bibliographie.

Otto Weinberger, Mathematische Volkswirtschaftslehre, XIV + 241 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1930.

Das Buch soll, wie auch in einem Untertitel ausgedrückt wird, eine Einführung sein, doch ist die erste Hälfte des Buches eine historisch-kritische Darstellung der matematischen Volkswirtschaftslehre, die ohne Kenntnis der ganzen Theorie mit wenig Erfolg zu lesen ist. Der historische Bericht erstreckt sich auch auf den Lebenslauf einzelner Forscher und geht manchmal in ganz unbedeutende Einzelheiten ein (so in Nr. 23 in der Geschichte der Auffindung des verschollenen Buches von GOSSEN). Bei Besprechung der bedeutenden Werke wird oft neben der deutschen Übersetzung auch der Originaltext in Klammer beigefügt, ein wenig vorsichtiges Verfahren, denn es kann dabei vorkommen, (wie hier auf Seite 74) daß die deutsche Übersetzung genau das Gegenteil der Bedeutung des zitierten englischen Textes aussagt.

Im weiteren wollen wir das Buch ausschließlich aus dem Gesichtspunkte des Mathematikers betrachten. Wir halten den Bericht des unfruchtbaren Streites über die Berechtigung der mathematischen Methode in der Volkswirtschaftslehre für ganz nutzlos; diese Frage kann ja nur durch die Erfolge der Theorie selbst, jedoch nicht durch erkenntnistheoretische Betrachtungen entschieden werden. Zur Charakterisierung führen wir nur eine Frage an: von den Gegnern der mathematischen Methode wird eingewendet, daß Gefühlsgrößen nicht gemessen werden können, demgegenüber beruft sich der Verfasser auf Jevons Ausspruch: „wer hätte vor Pascals Zeit daran gedacht, Zweifel und Glauben zu messen?" Nach des Referenten Meinung wird heute wohl kein Mathematiker zugeben, daß man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Zweifel und Glauben mißt.

Mathematiker werden wohl auch der Meinung des Referenten zustimmen, daß die Anwendung von Formeln und Grafikons für die mathematische Behandlung eines Gegenstandes weder notwendig noch aber hinreichend ist. Die mathematische Methode sollte vielmehr gleich bei der präzisen Definition der Grundbegriffe einsetzen, hierauf verzichtet aber der Verfasser schon im Vorwort. In Nr. 14a „Erläuterung wichtiger Grundbegriffe" lernt man das Produkt zweier Funktionen zu differenzieren und das Extremum einer Funktion zu bestimmen. Die Einführung der Begriffe Nutzen und Wert (S. 134) ist bei weitem nicht mathematisch, dagegen wird der Preis im ersten Satz der Nr. 57 einwandfrei definiert, durch die nachfolgende „mathematische" Erklärung auf Grund der Abbildung und Formel wird aber die Sache eher nur verdunkelt. Wie die Definitionen, so sind auch die Beweise nicht immer geeignet einen Mathematiker zu befriedigen.

Wenn man auch das Verdienst der mühsamen Zusammenstellung so vieler Daten anerkennen muß, kann man kaum hoffen, daß dieses Buch die Gegner der mathematischen Volkswirtschaftslehre bekehren werde.

P. Veress.

Friedrich Schilling, Projektive und Nichteuklidische Geometrie, Band I: Projektive Geometrie in analytischer Behandlung nebst einem Einblick in die Grundlagen der Geometrie und **Band II:** Nichteuklidische Geometrie auf der Grundlagen der projektiven Geometrie, XI + 212 bzw. XI + 216 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1931.

Das vorliegende Buch besteht aus zwei Bänden. Der erste Band: *Projektive Geometrie,* enthält eine konsequent strenge Behandlung der wichtigeren Teile der projektiven Geometrie. Der Verfasser baut die ebene projektive Geometrie in ganz neuer und origineller Weise auf und schließt dabei alles aus, was dem Begriff *projektiv* fremd ist. Der Band besteht aus zwei Teilen: *Entwicklungen der Elementargeometrie als Fundament für den Aufbau der projektiven Geometrie; Aufbau der projektiven Geometrie.* Im ersten Teil weist der Verfasser mit Nachdruck darauf hin, daß das Parallelenaxiom bei einen streng projektiven Aufbau auszuschließen ist und führt die wichtigen Begriffe der verschiedenartigen uneigentlichen Elementen ein. Im zweiten Teile wird die Behandlungsweise nach projektiver Einführung eines Koordinatensystems durchwegs rein analytisch. Die weiteren Abschnitte behandeln der Reihe nach die Gleichung der Geraden, die Linienkoordinaten, die Koordinatentransformationen in der projektiven Ebene, die projektive Verwandschaften, die projektive Theorie der Kegelschnitte, die Abbildung der projektiven Ebene in einem begrenzten Gebiet des Raumes, ferner die biprojektive Ebene.

Der erste Band ist eigentlich eine vollständige Vorbereitung zu dem zweiten: *Nichteuklidische Geometrie.* Letzterer besteht ebenfalls aus zwei Teilen: *Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie; Höhere Gebiete der nichteuklidischen Geometrie.* Der Verfasser gelangt zur nichteuklidischen Geometrie auf jenen Weg, den schon BOLYAI und LOBATSCHEFSKIJ gewandert sind. Dieser Weg mündet aber schließlich, bei den höheren Untersuchungen, in den Kleinschen Weg ein. Zum Aufbau der projektiven Geometrie waren nur die Axiome der *Verknüpfung,* der *Anordnung* und der *Stetigkeit* nötig. Jetzt werden zu den vorigen Axiomen noch bestimmte Axiome der *Bewegung* hinzugenommen, daraus die Kongruenzsätze gewonnen und dann mit Hilfe des einen oder anderen Parallelenaxioms die verschiedenen nichteuklidischen Geometrien entwickelt.

Der Leser wird in diesem recht interessanten Werke viele neue Überlegungen und Ergebnisse finden und wird auch erlernen, daß sich die Ideen Kleins zur Aufbau der nichteuklidischen Geometrie auch ganz unabhängig von der euklidischen Geometrie entwickeln lassen. Man findet in diesem Buch auch hinsichtlich der höheren Gebiete der nichteuklidischen Geometrie einen reichhaltigen Stoff. Die Kreistheorie, der Bogenelement, die nichteuklidische Trigonometrie werden ausführlich behandelt. Ein Schlußabschnitt wird dem Verhältnis der nichteuklidischen Geometrie zur Relativitätstheorie, Geodäsie und Astronomie gewidmet.

Die Beweisführungen werden durchwegs streng aber sehr anschaulich geführt und verleihen dem Buch in pädagogischen Hinsicht einen besonderen Wert.

St. Lipka.

Horst v. Sanden, Darstellende Geometrie (Teubners math. Leitfäden, 2), VIII + 111 S., mit 114 Abbildungen im Anhang, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1931.

Der Hauptzweck des vorliegenden Büchleins ist, die Raumanschauung des Lesers beim Studium der darstellenden Geometrie auszubilden. Das Buch behandelt die gewöhnliche Darstellung mit Grund- und Aufriß, die Axonometrie und die Zentralperspektive. Als Ausgangspunkt dienen oft technische Aufgaben; dies ist nicht nur dem Ingenieur nützlich, sondern jedem Leser lehrreich. Der Verfasser wendet häufig die analytische Methode an, um den Weg möglichst zu verkürzen. Bei den Abbildungen wird das Gewicht auf das Wesentliche gelegt.

St. Lipka.

Ludwig Bieberbach, Projektive Geometrie (Teubners math. Leitfäden, 30), VI + 190 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1931.

Das Hauptziel des Verfassers dieses kleinen, aber reichhaltigen Buches war, die projektive Geometrie rein analytisch darzustellen. Diese Darstellung ist ihm recht gelungen. Nach einigen Vorbereitungen werden die allgemeinen homogenen Koordinaten eingeführt; dadurch verwischt sich der Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Elementen der Geometrie schon vom Anfang an. Dann wird die projektive Geometrie im Sinne des Erlanger Programms behandelt; der Gegenstand der weiteren Entwicklungen ist also die Untersuchung derjenigen Eigenschaften der Figuren, welche gegenüber Kollineationen invariant bleiben. Die Theorie der Kurven und Flächen zweiter Ordnung gewinnen eine ausführliche Darstellung vom projektiven Standpunkt aus. Der Verfasser legt einen großen Gewicht daran, den Unterschied zwischen „projektiv" und „affin" bei den verschiedenen Klassifikationen jedesmal hervortreten zu lassen. Die Darstellung trägt nicht nur der ganzen projektiven Gruppe, sondern auch ihren Untergruppen, der affinen, euklidischen und metrischen Gruppe Rechnung. Das Buch ist, neben ausführlicher Darlegung der prinzipiellen

Gesichtspunkte, auch hinsichtlich des Stoffes recht reichhaltig; unter anderen bietet es vieles aus der Dreiecksgeometrie. Die Ausdruckweise ist modern und bedient sich oft der Matrizensprache. Da der Darstellung ein ganz knappes und leichtes Axiomensystem zugrunde gelegt wird, kann das Buch auch als eine erste Einführung in die Grundlagen der Geometrie dienen.

St. Lipka.

Friedrich Schilling, Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie, V + 70 S. mit einer Bildnistafel, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1931.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die *Bolyai-Lobatschefskijsche* (hyperbolische) Geometrie mit möglichst einfachen Mitteln einzuführen. Nach einer kurzen Gegenüberstellung der elliptischen und hyperbolischen Geometrie führt das Buch die Gleichung der Pseudosphäre (Drehfläche der Traktrix-Kurve) ein. Durch die bekannte konforme Abbildung dieser Fläche auf die euklidische Ebene ergeben sich die Grundsätze der hyperbolischen Geometrie sehr einfach. Nach einer übersichtlichen Ableitung der hyperbolischen Trigonometrie werden die Kreistheorie, die drei Arten der sogenannten Pseudobewegungen und der Dreiecksinhalt in dieser Abbildung behandelt. Durch Übertragung der Pseudobewegungen auf die Pseudosphäre werden die Hauptarten der Bewegungen und die Haupteigenschaften der geodetischen Linien auf der Pseudosphäre einfach und anschaulich festgestellt. — Wir hoffen, daß das vorliegende vorzügliche Buch die Kenntnisse der nichteuklidischen Geometrie in größeren Kreisen, sogar im Schulunterricht verbreiten wird.

Das Buch enthält eine Bildnistafel mit den Bildern von GAUSZ, LOBATSCHEFSKIJ, MÖBIUS, RIEMANN, BELTRAMI, POINCARÉ, KLEIN und HILBERT nebst Angabe ihrer Lebensdauer und der Örter, wo sie gewirkt haben. Da kein Bildnis von JOHANN v. BOLYAI erhalten geblieben ist, so hätte der Verfasser wenigstens die Daten den Lesern mitteilen können. Auch könnte der Verfasser statt des Bildnisses von J. v. BOLYAI das Bildnis seines Vaters WOLFGANG v. BOLYAI angeben, der in der nichteuklidischen Geometrie ebenfalls eine bedeutungsvolle Rolle gespielt hat. Die Aufzählungen der Arbeiten von LOBATSCHEFSKIJ und BOLYAI stehen nicht im richtigen Verhältnis. Während die Daten der Faksimileausgabe der Arbeiten von LOBATSCHEFSKIJ zitiert werden, wurden nicht einmal die Titel und das Erscheinungsjahr der Hauptarbeiten von WOLFGANG und JOHANN v. BOLYAI angegeben. (Der Appendix von JOHANN v. BOLYAI ist übrigens ebenfalls in Faksimileausgabe erschienen: Maros-Vásárhely, 1907.)

Sz. Nagy.