Sur les ensembles compacts de fonctions sommables.

Par Marcel Riesz à Lund.*)

1. Soit R un espace euclidien à un nombre fini de dimensions. En désignant par x un point quelconque de cet espace, on entend par dx l'élément de volume correspondant. Par $x+h$ on désigne l'effet du déplacement h au point x. La valeur absolue $|h|$ du déplacement sera mesurée au sens euclidien.

Nous désignons, pour $p \geqq 1$, par L^p la classe des fonctions $f(x)$ définies et mesurables dans l'espace R et telles que l'intégrale de $|f(x)|^p$, étendue à tout l'espace, existe. Nous posons pour une telle fonction

$$\|f\| = \|f(x)\| = \Big(\int_R |f(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

et encore, en désignant par E un sous-ensemble mesurable quelconque de l'espace R,

$$\|f\|_E = \|f(x)\|_E = \Big(\int_E |f(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

Nous aurons souvent à nous servir de l'inégalité de Minkowski

$$\|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|, \tag{3}$$

qui met en évidence que (1) définit un espace métrique au sens de M. Fréchet, la dénomination étant celle de M. Hausdorff.

Si $f(x)$ satisfait à l'inégalité

$$\|f\| \leqq M, \tag{4}$$

nous dirons que M est une *borne* de $f(x)$.

*) Conférence faite au Séminaire mathématique de l'Université de Lund le 21 février 1933.

Cela étant, nous pouvons énoncer le théorème suivant dû à M. Lebesgue

Pour toute fonction $f(x)$ de la classe L^p, on a

$$(5)\quad \lim_{|h|\to 0}\|f(x+h)-f(x)\| = \lim_{|h|\to 0}\left(\int_E |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

M. Lebesgue n'a donné ce théorème que pour $p=1$, mais la démonstration s'étend immédiatement au cas général. Pour préciser le sens de (5), nous l'écrirons encore sous la forme

$$(5')\qquad \|f(x+h)-f(x)\| \leqq \varepsilon, \qquad \text{pour } |h| \leqq \delta.$$

Ici ε et δ sont des nombres positifs, le premier arbitraire, le second suffisamment petit.

En désignant encore par E_A l'ensemble des points de R dont a distance à un point fixe de R est $>A$, on a évidemment

$$(6)\qquad \lim_{A\to\infty}\|f\|_{E_A} = 0,$$

ou

$$(6')\qquad \|f\|_{E_A} \leqq \varepsilon, \qquad \text{pour } A \text{ assez grand.}$$

Nous dirons avec M. Fréchet qu'un ensemble de fonctions $\{f(x)\}$ appartenant à la classe L^p est *compact* au sens L^p, si, de tout sous-ensemble infini, on peut tirer une suite qui tend vers une fonction limite au sens L^p. Cette définition implique que tout ensemble de fonctions qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments, est compact.

Le but principal de cette Note est de démontrer le théorème suivant.

Pour qu'un ensemble $\{f(x)\}$ de fonctions appartenant à la classe L^p soit compact au sens L^p, il faut et il suffit qu'il existe une borne commune M telle que (4) *tienne, et que les relations* (5) *et* (6) *aient lieu uniformément pour toutes les fonctions de l'ensemble* $\{f(x)\}$.

On pourra aussi exprimer ces conditions en disant que *les fonctions $f(x)$ ont à être également bornées et également continues dans l'espace R et encore également infiniment petites dans la partie infiniment éloignée de cet espace, tout cela étant entendu au sens L^p.*

En admettant un instant que nos fonctions s'annulent à l'extérieur d'un certain ensemble borné et fermé, la condition (6) disparaît et l'on retrouve, pour $p\to\infty$, comme cas limite les conditions d'Arzelà pour qu'un système de fonctions continues dans un tel ensemble y soit compact dans le sens de la convergence uniforme, à savoir que les fonctions soient également bornées et également continues au sens ordinaire.

2. *Pour* $p > 1$, on possède déjà un critère pour la compacticité au sens L^p dû à M. Kolmogoroff[1]) et à M. Tamarkin.[2]) M. Kolmogoroff s'est restreint à des fonctions qui s'annulent à l'extérieur d'un ensemble borné. Il trouve comme conditions nécessaires et suffisantes que les fonctions $\{f(x)\}$ soient également bornées et que ces fonctions puissent être approchées uniformément par certaines valeurs moyennes qu'on retrouvera plus loin au n° **4** (formule (8)). Là on retrouve aussi la condition de M. Kolmogoroff sous forme explicite (inégalité (9)). M. Tamarkin a étendu le résultat de M. Kolmogoroff en supprimant la condition que les fonctions $\{f(x)\}$ s'annulent à l'extérieur d'un ensemble borné. Il ajouta en échange aux conditions nécessaires et suffisantes de M. Kolmogoroff celle que nous avons exprimée en disant que les fonctions $\{f(x)\}$ ont à être également infiniment petites dans la partie infiniment éloignée de l'espace R.

En résumé, *pour* $p > 1$, deux de nos conditions se trouvent déjà chez les auteurs cités, tandis que celle exigeant que nos fonctions soient également continues au sens L^p, remplace la condition la plus marquée de M. Kolmogoroff se rattachant aux valeurs moyennes (8). Notre condition permet de résoudre la question aussi dans le cas $p = 1$.

3. Avant d'aborder la démonstration de notre théorème, nous donnons encore une condition alternative qui découle immédiatement d'un théorème très général et très important de M. Hausdorff sur les espaces métriques. M. Hausdorff démontre[3]) qu'un ensemble d'éléments d'un espace métrique (complet) est compact en même temps qu'il est totalement borné. Appliqué au cas particulier qui nous occupe, le théorème de M. Hausdorff revient à ceci:

---

[1]) A. Kolmogoroff, Über die Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, *Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen*, 1931, p. 60—63.

[2]) J. D. Tamarkin, On the compactness of the space L_p, *Bulletin American Math. Soc.*, **38** (1932), p. 79—84.

[3]) F. Hausdorff, (*Grundzüge der*) *Mengenlehre*, 1ère éd. 1914, p. 311 et *suiv.*, 2ième éd. 1927, p. 107 et *suiv.*

Pour que l'ensemble $\{f(x)\}$ *de la classe* L^p *soit compact au sens* L^p *il faut et il suffit que, pour tout nombre positif* ε, *il existe un nombre* fini *de fonctions* $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ *appartenant elles-mêmes à la classe* L^p *de sorte que, pour chaque fonction* $f(x)$, *l'une au moins des inégalités*

$$(7) \qquad \|f(x)-g_k(x)\| \leqq \varepsilon \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

soit remplie.

Il est pour ainsi dire évident que les fonctions $g_k(x)$ pourront être spécialisées de beaucoup de manières. Ainsi p. ex. on pourra les choisir parmi les fonctions $\{f(x)\}$, ou encore on pourra prescrire qu'elles soient continues ou qu'elles n'admettent qu'un nombre fini de valeurs etc.

Le critère de M. Hausdorff admet bien des applications directes. Ainsi p. ex., on voit sur le champ que tout système de fonctions également bornées et à variation également bornée sur un segment fini, y est compact L^p pour toute valeur finie de p.

4. Montrons maintenant comment on peut déduire le théorème énoncé au n° 1 du théorème de M. Hausdorff. Il s'ensuit immédiatement de ce dernier théorème et des remarques faites au n° 1 que nos conditions sont nécessaires. En effet, ces conditions étant remplies pour chacune des fonctions $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$, on n'aura qu'à prendre les bornes les moins favorables et à appliquer l'inégalité (3).

Il reste à démontrer que nos conditions sont suffisantes. Le nombre de dimensions de notre espace étant n, désignons avec M. Kolmogoroff la sphère à n dimensions de centre x et de rayon δ par $S(x, \delta)$ et formons avec lui la valeur moyenne

$$(8) \qquad f_\delta(x)=\frac{1}{V(\delta)}\int\limits_{S(x,\,\delta)} f(y)\,dy,$$

$V(\delta)$ désignant le volume de la sphère.

Nous allons démontrer que si les conditions (5′) et (6′) sont remplies par la fonction $f(x)$, on a aussi

$$(9) \qquad \|f(x)-f_\delta(x)\| \leqq \varepsilon$$

et

$$(10) \qquad \|f_\delta(x)\|_{E_A} \leqq 2\varepsilon.$$

On a encore, pour *tout point x,* les deux inégalités, la dernière étant valable pour h quelconque,

$$(11)\qquad |f_\delta(x)| \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}} \|f\|$$

et

$$(12)\qquad |f_\delta(x+h) - f_\delta(x)| \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}} \|f(x+h) - f(x)\|.$$

Ces deux dernières relations disent que nos conditions (4) et (5) étant également remplies par les fonctions $\{f(x)\}$, les fonctions $\{f_\delta(x)\}$ seront *également bornées et également continues au sens ordinaire, pour toute valeur fixe de* δ. Les mêmes conclusions découlent, pour $p > 1$, aussi des hypothèses de M. Kolmogoroff et jouent un rôle important dans sa démonstration.

Admettons un instant que les inégalités (9)—(12) soient déjà établies. Alors il est facile de trouver des fonctions $g_k(x)$ qui pourront figurer au théorème de M. Hausdorff et de réduire ainsi notre théorème à celui-là.

En effet, on peut d'abord, en vertu de (9), choisir δ de façon que les valeurs $\|f(x) - f_\delta(x)\|$ soient *également*[4]) très petites. Ensuite, grâce à (10), on peut déterminer un domaine rectangulaire D assez grand pour que les fonctions $\{f'_\delta(x)\}$ identiques aux fonctions $\{f_\delta(x)\}$ à l'intérieur de D et s'annulant à son extérieur, rendent les valeurs $\|f_\delta(x) - f'_\delta(x)\|$ très petites. Puisque les fonctions $\{f'_\delta(x)\}$ sont également bornées, on pourra trouver des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, en nombre fini, de manière que chaque valeur particulière $f'_\delta(x)$ soit très voisine de l'une au moins de ces valeurs α_j. D'autre part, les fonctions $\{f'_\delta(x)\}$ étant aussi également continues, on peut diviser D en un nombre fini s de domaines rectangulaires partiels de sorte que l'oscillation d'une fonction quelconque $f'_\delta(x)$ dans un tel domaine soit très petite. Toutes les valeurs qu'une certaine fonction $f'_\delta(x)$ admet dans un tel domaine partiel seront alors très voisines de l'une au moins des valeurs α_j que nous venons d'introduire. Cela étant, nous définissons un système de r^s fonctions $g_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, r^s)$ s'annulant toutes à l'extérieur de D et admettant dans chaque domaine partiel une valeur constante, égale à l'une des valeurs α_j. Il ressort

---

[4]) Dans la suite, nous ne répétons pas ce mot à chaque occasion.

de la construction ci-dessus que toute fonction $f'_\delta(x)$ sera très voisine — au sens ordinaire — de l'une au moins des fonctions $g_k(x)$. Les deux fonctions étant identiques à l'extérieur de D, une approximation assez bonne, au sens ordinaire, rendra la valeur $\|f'_\delta(x)-g_k(x)\|$ aussi petite qu'on voudra. Les valeurs $\|f(x)-f_\delta(x)\|$, $\|f_\delta(x)-f'_\delta(x)\|$ et $\|f'_\delta(x)-g_k(x)\|$ pouvant être rendues arbitrairement petites, il en sera de même, grâce à l'inégalité fondamentale (3), de la valeur $\|f(x)-g_k(x)\|$.

5. Tout ce qui reste, c'est à démontrer les inégalités (9)—(12). Nous partons, pour y arriver, d'une inégalité bien connue, qui est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder. On a pour toute fonction $l(x)$ de la classe L^p

$$\left|\frac{1}{V(\delta)}\int_S l(y)\,dy\right| \leqq \left(\frac{1}{V(\delta)}\int_S |l(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{14}$$

où l'on a posè, pour abréger, S au lieu de $S(x,\delta)$.

Posons ici d'abord $l(y)=f(y)$. Il vient d'après (8)

$$|f_\delta(x)| \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}}\|f\|_S \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}}\|f\|,$$

c'est-à-dire l'inégalité (11).

En posant maintenant dans (14) $l(y)=f(y+h)-f(y)$, nous obtenons, par un calcul analogue,

$$|f_\delta(x+h)-f_\delta(x)| \leqq (V(\delta))^{-\frac{1}{p}}\|f(x+h)-f(x)\|,$$

c'est-à-dire l'inégalité (12).

En posant encore $l(y)=f(x)-f(y)$, il vient d'abord

$$|f(x)-f_\delta(x)| \leqq \left(\frac{1}{V(\delta)}\int_S |f(x)-f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

ou

$$|f(x)-f_\delta(x)|^p \leqq \frac{1}{V(\delta)}\int_{S(x,\delta)} |f(x)-f(y)|^p\,dy =$$

$$= \frac{1}{V(\delta)}\int_{S(0,\delta)} |f(x)-f(x+h)|^p\,dh.$$

En intégrant cela par rapport à x, l'intégrale étant étendue à l'espace entier R, il résulte

$$\int_R |f(x)-f_\delta(x)|^p\,dx \leqq \frac{1}{V(\delta)} \int_{S(0,\delta)} dh \int_R |f(x+h)-f(x)|^p\,dx.$$

L'intégrale étendue à l'espace R qui figure au second membre étant $< \varepsilon^p$ d'après (5'), on en tire immédiatement l'inégalité (9).

Enfin l'inégalité (10) résulte immédiatement par (3) de la combinaison de (9) et de (6').

(Reçu le 12 juin 1933)