Zu den Verallgemeinerungen des Rolleschen Satzes.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

1. Im folgenden wird $f(z)$ immer eine im Kreise $|z| \leqq 1$ reguläre analytische Funktion bedeuten, und es wird vorausgesetzt, daß $f(z)$ in diesem Kreise bis auf die Nullstellen $z = \pm 1$ nicht verschwindet. Ich beweise zuerst den folgenden Satz, der eine gewisse Analogie zum Rolleschen Satze zeigt.

Es sei

$$f(z) = (z^2 - 1) g(z),$$

wo die Funktion $g(z)$ im Kreise $|z| \leqq 1$ regulär und von Null verschieden ist. Ich behaupte, daß die Gleichung

$$f'(z) = 0$$

im Inneren des Einheitskreises genau eine Wurzel besitzt, wenn an jeder Stelle $z = e^{i\vartheta}$, wo

$$\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) = 0$$

ist, die Ungleichung

$$1 - \Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) \sin\vartheta > 0 \qquad (z = e^{i\vartheta})$$

gilt.

Zum Beweise brauchen wir den folgenden

Hilfssatz. *Im Kreise $|z| \leqq 1$ seien die Funktionen $\psi(z)$ und $\varphi(z)$ regulär und am Rande $\psi(z) \neq 0$. Wenn an jeder Stelle der Peripherie, wo das „vektorielle Produkt" $\psi(z) \times \varphi(z) = \Im(\overline{\psi(z)}\,\varphi(z))$ verschwindet, das „skalare Produkt" $(\psi(z) \,.\, \varphi(z)) = \Re(\overline{\psi(z)}\,\varphi(z))$*

konstantes Vorzeichen hat, so besitzen die Funktionen $\psi(z)$ und $\varphi(z)$ gleichviele Nullstellen im Kreise $|z| < 1$.[1])

Wir wenden jetzt diesen Hilfssatz auf die Funktionen

$$\psi(z) = z$$

und

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{g(z)} = 2z + (z^2 - 1)\frac{g'(z)}{g(z)} \tag{1}$$

an. Dies ist erlaubt, da $g(z)$ im Kreise $|z| \leqq 1$ von Null verschieden ist. Zuerst berechnen wir das skalare Produkt der Funktionen z und $\frac{f'(z)}{g(z)}$; es wird nach (1)

$$\left(z \cdot \frac{f'(z)}{g(z)}\right) = 2 + \Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\{\sin\vartheta \sin 2\vartheta - 2\sin^2\vartheta\cos\vartheta\} -$$
$$- \Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\{\sin 2\vartheta\cos\vartheta + 2\sin^2\vartheta\sin\vartheta\} \quad (z = e^{i\vartheta}),$$

da aber

$$\sin\vartheta\sin 2\vartheta - 2\sin^2\vartheta\cos\vartheta = 0$$

und

$$\sin 2\vartheta\cos\vartheta + 2\sin^2\vartheta\sin\vartheta = 2\sin\vartheta$$

ist, so gewinnt man für das skalare Produkt die Formel

$$\left(z \cdot \frac{f'(z)}{g(z)}\right) = 2\left\{1 - \Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\sin\vartheta\right\}. \tag{2}$$

Ferner gilt für das vektorielle Produkt

$$z \times \frac{f'(z)}{g(z)} = \left\{2\sin\vartheta + \sin 2\vartheta\,\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) - 2\sin^2\vartheta\,\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\right\}\cos\vartheta -$$
$$- \left\{2\cos\vartheta - 2\sin^2\vartheta\,\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right) - \sin 2\vartheta\,\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\right\}\sin\vartheta$$
$$= 2\sin\vartheta\,\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right). \tag{3}$$

Nach (2) und (3) folgt aus dem Hilfssatze, daß die Gleichung $f'(z) = 0$ im Kreise $|z| < 1$ genau eine Wurzel hat.

---

[1]) Für den Beweis dieses Hilfssatzes vgl. St. Lipka, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten, *diese Acta*, **5** (1930—32), S. 69—77, insb. S. 73. (Hilfssatz II.)

Bemerkung. Setzt man voraus, daß an jeder Stelle der Peripherie $|z|=1$, wo $\Re\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)=0$ ist, die Ungleichung

$$\left|\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\right|<1$$

gilt, dann folgt

$$1-\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\sin\vartheta \geqq 1-\left|\Im\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\right|>0,$$

und man gewinnt den folgenden Satz von Herrn DIEUDONNÉ[2]). *Man schneide die Ebene z von den Punkten i und $-i$ ausgehend in der Richtung der positiven bzw. der Negativen imaginären Achse auf. Wenn das durch die Funktion $\frac{g'(z)}{g(z)}$ vermittelte Bild des Kreises $|z|\leqq 1$ im Inneren der aufgeschnittenen Ebene liegt, dann hat die Gleichung*

$$f'(z)=((z^2-1)g(z))'=0$$

genau eine Wurzel im Kreise $|z|<1$.

Ich habe vorausgesetzt, daß $g(z)$ im Kreise $|z|\leqq 1$ von Null verschieden ist; es stellt sich aber aus der Formel (1) sogleich heraus, daß die Funktion $\frac{f'(z)}{g(z)}$ in diesem Kreise auch dann noch regulär bleibt, wenn $g(1)=0$, $g(-1)=0$ wird. Die vorangehenden Überlegungen bleiben also richtig, wenn die Wurzeln $z=\pm 1$ der Gleichung $f(z)=0$ beliebig hohe Multiplizität haben.

2. Es sei wieder die Funktion $f(z)$ im Kreise $|z|\leqq 1$ regulär und von Null verschieden, bis auf die Nullstellen $z=\pm 1$. Wenn der Punkt $z=1$ eine mindestens zweifache Wurzel von $f(z)=0$ ist, so kann man schreiben

$$\begin{aligned} f(z) &= (z^2-1)g(z) \\ &= (z-1)^2(z+1)h(z). \end{aligned}$$

Ich behaupte nun: *wenn das durch die Funktion $\frac{g'(z)}{h(z)}$ vermittelte Bild des Kreises $|z|\leqq 1$ in der Halbebene $\Re(z)>-1$ liegt, so hat die Gleichung $f'(z)=0$ genau eine Wurzel im Kreise $|z|<1$.*

---

[2]) J. DIEUDONNÉ, Sur une généralisation du théorème de Rolle aux fonctions d'une variable complexe etc., *Annals of Mathematics*, (2) **31** (1930), pp. 79–116.

Beweis. Wir betrachten statt $f'(z)=0$ die Gleichung

$$\frac{f'(z)}{g(z)}=2z+(z+1)\frac{g'(z)}{h(z)}=0.$$

Es sei $\frac{g'(z)}{h(z)}=\frac{1}{u(z)}$; dann gewinnt man aus der vorigen Gleichung die folgende:

$$2z\,u(z)+z+1=0,$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$z=-\frac{1}{2u(z)+1}=U(u(z)). \tag{4}$$

Wenn nun die Funktion $\frac{1}{u(z)}$ den Kreis $|z|\leqq 1$ auf einen Teil der Halbebene $\Re(z)>-1$ abbildet, so bildet $U(u(z))$ nach (4) den Kreis $|z|\leqq 1$ auf einen Teil der offenen Kreisscheibe $|z|<1$ ab. Also wird am Rande des Kreises $|z|\leqq 1$

$$|z|>|U(u(z))|,$$

so daß die Gleichung (4) nach einem wohlbekannten Satze genau eine Wurzel im Kreise $|z|<1$ besitzt.

(Eingegangen am 11. März 1933.)