Bibliographie.

Solomon Lefschetz, Topology (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XII), IX + 410 pages, New York, American Mathematical Society, 1930.

The work of LEFSCHETZ on Topology is heartily welcome to every one who cares for new researches in this field: its content is rich, almost too rich; besides of new results many efficient methods are exposed; there are new and general points of view under which most of the fundamental concepts are ordered; some times one regrets to find a general and complicated theorem instead of the particular important and simple theorems hidden under it. The whole work has a certain freshness that gives stimulation for new researches.

In a short introduction the primary notions of general (abstract) topology are explained. Chapter I deals with the combinatorial theory of complexes. In Chapter II the topological invariance of the homology characters is proved on the base of certain deformation theorems; the invariance of dimensionality and regionality are deduced as their consequences. Chapter III contains a study of the general theory of manifolds, then very comprehensive duality theorems. Chapter IV deals with intersection numbers and KRONECKER index, Chapter V with product complexes and manifolds. In Chapter VI transformations of manifolds, their coincidences and fixed points are considered under a very extensive and general aspect. Chapter VII is devoted to infinite complexes; ideal elements are introduced in a looser way than by KERÉKJÁRTÓ and FREUDENTHAL; many interesting results turn out all the same. The last Chapter gives an account on the applications of general results of topology to analytical and algebraic varieties.

B. de K.

Oswald Veblen, Analysis Situs (American Math. Society Colloquium Publications, Volume V, Part II), second edition, XI + 194 pages, New-York, American Mathematical Society, 1931.

In the preface of the first edition (1922) the author says that „analysis situs is still in such a state that the best welcome which can be offered to any comprehensive treatment is to wish it speedy obsolescence". As the new researches on combinatorial analysis situs have avoided the main problems, and VEBLEN has the right feeling for separating results and methods of constant value from those of temporary interest, his wish is not fulfilled for his own work: the new edition is — except some minor changes — a reprint of the first one and it seems to stay still for a long time as the standard-work on combinatorial analysis situs. The content of the first edition — I. linear graphs, II. two dimensional complexes and manifolds, III. complexes and manifolds of n dimensions, IV. orientable manifolds, V. the fundamental group and certain unsolved problems — has been enlarged by two appendixes, I. on the intersection numbers and II. on matrices whose elements are integers, — two papers of the author reprinted with minor changes.

B. de K.

Konrad Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band II), dritte vermehrte und verbesserte Auflage, XII + 582 S., Berlin, J. Springer, 1931.

Das bereits in seiner ursprünglicher Form reichhaltige Buch wurde in der zweiten Auflage durch eine wesentliche Erweiterung des Kapitels über die verschiedenen Summierungsverfahren für divergente Reihen bereichert; in der vorliegenden dritten Auflage wurde sein Wert durch ein neues Kapitel erhöht. Dieses behandelt, nachdem der Begriff einer asymptotischen Reihe im Anschluß an das vorangehende Kapitel erläutert wird, die Euler-Maclaurinsche Summenformel in einer sehr eleganten, auf WIRTINGER zurückgehenden Darstellung; als Anwendungen werden die bekannten Formeln für die Potenzsummen und die Teilsummen der harmonischen Reihe, ferner die Strilingsche Formel für die Gammafunktion hergeleitet. Dann folgen allgemeine Betrachtungen über asymtotische Reihen, insbesondere über die asymptotische Entwicklung vorgelegter Funktionen und über das umgekehrte Problem, zu einer asymptotischen Reihe die entsprechende Funktion (oder Funktionen) zu ermitteln.

Auch der alte Teil des Buches wurde durchgearbeitet; mehrere Beweise wurden durch einfachere ersetzt.

Ein Zeugniß der allgemeinen Beliebtheit des Buches ist, daß dasselbe inzwischen auch in englicher Sprache erschienen ist.

L. Kalmár.

Leon Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen, X + 164 S., Berlin, J. Springer, 1931.

In dieser wertvollen Monographie gelang es dem anerkannten Forscher die reife und reiche Frucht seiner zerstreuten Untersuchungen zu sammeln und — in Gastvorlesungen einheitlich behandelt — weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Sie ist auch deshalb beachtenswert, da sie alle die Ergebnisse umfaßt, welche seit den grundlegenden Untersuchungen von E. SCHMIDT und LIAPOUNOFF (1906) bis vor kurzem (1929) im Kreise dieser Funktionalgleichungen überhaupt ans Licht gefördert wurden.

Kapitel I beginnt mit den Grundlagen: der Betrachtung von Schmidtschen nichtlinearen Integralgleichungen im Kleinen, d. h. in der Nachbarschaft einer bekannten Lösung bei kleiner Änderung der gegebenen Funktionen bzw. Parameter. Resultate, auf welche SCHMIDT in Verallgemeinerung der Auflösung eines nichtlinearen Gleichungssystems sowohl im Falle des Nichtverschwindens (regulärer Fall), wie des Verschwindens der Funktionaldeterminante (Verzweigungsfall) gelangte, LIAPOUNOFF dagegen bei der Untersuchung von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten in der Nachbarschaft der klassischen Ellipsoide kam. Die Methode ist aber neu: jene der sukzessiven Approximationen, was sich in mehrfacher Hinsicht erfolgreicher erweist. Die Verzweigungsgleichungen werden mit einer hübschen Vereinfachung der Schmidtschen Kernzerspaltung eingeführt. Durch die naheliegende Verallgemeinerung auf Systeme solcher Integralgleichungen wird der Rahmen der klassischen Resultate überschritten und eine Anzahl auf solche Systeme zurückführbarer Integro-Differentialgleichungen einheitlich behandelt. Daß die dort angegebene Gleichung (108) auf eine frühere zurückführbar sei, scheint aber fraglich zu sein.

Die folgenden beiden Kapiteln bieten eine überraschend reiche Auswahl an Anwendungen in engerem und weiterem Sinne. Die letzteren umfassen die Fortpflanzung zweidimensionaler permanenter Oberflächenwellen endlicher Amplitude, ein nichtlineares Randwertproblem der Wärmestrahlung, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Dynamik inkohärenter gravitierender Medien, Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten.

Den Mathematiker werden insbesondere die — teilweise schon von E. SCHMIDT vermuteten — Anwendungen auf nichtlineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung interessieren. Diese beziehen sich einerseits auf des Verhalten der Lösung bei kleiner Änderung der Randwerte oder Parameter, also auf Probleme im Kleinen, anderseits aber durch Verwendung einer auf ROY und S. BERNSTEIN zurückgehenden Methode auch auf Probleme im Großen. Nach dieser Methode wird ja in die Gleichung ein Parameter eingeführt, schrittweise klein geändert, und so die für seinen Anfangswert bekannte Lösung in die für seinen Endwert gesuchte schrittweise fortgesetzt.

Das letzte Kapitel behandelt spezielle nichtlineare Integralgleichungen im Großen. Existenzfragen werden auf Variationsprobleme zurückgeführt und mit der Ritzschen Methode behandelt.

Die Darstellung ist streng, die Literaturangaben vorzüglich und vollständig, die Forderung an Vorkenntnissen durch ausführliche Angabe des Nötigen gemäßigt. Bei dem heutzutage wachsenden Interesse für ihren Gegenstand ist die Monographie als eine wertvolle Bereicherung der Literatur dieses Forschungsgebietes zu begrüßen. T. v. Stachó.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, zweiter Band: Funktionen mehrerer Veränderlicher, zweite verbesserte und vermehrte Auflage, VIII + 412 S., Berlin, J. Springer, 1931.

Es erübrigt sich, von der Beliebtheit des trefflichen Lehrbuches von COURANT zu reden: die Tatsache, daß so unerwartet rasch eine zweite

Auflage beider Bände nötig geworden ist, spricht selbst. Während aber der erste Band fast unverändert zum zweitenmal erschienen ist, so weist die Neuauflage des zweiten Bandes wesentliche Erweiterungen auf, die den Wert des Buches, wenn möglich, noch erhöhen.

So begrüßt man mit Freude den neuen Paragraphen über das Volumen und Oberfläche in mehrdimensionalen Räumen: heute besitzen diese Sachen kein bloß theoretisches Interesse, vielmehr gehören sie dem unentbehrlichen Werkzeug des Physikers an. Die Eigenschaften der Gammafunktion, die in der ersten Auflage nur teilweise als Beispiele vorgekommen sind, wurden hier in einem besonderen Paragraphen systematisch entwickelt. Das letzte Kapitel hat durch eine kurze Darlegung der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen (nebst ihren Randwertproblemen), des Eulerschen Multiplikators und besonders durch den Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes der Differentialgleichungen erster Ordnung eine wesentliche Erweiterung erfahren.

Auch abgesehen von diesen größeren Erweiterungen wurde überall eine Verbesserung, wo sie sich dargeboten hat, durchgeführt. Um nur eine einzige Stelle zu erwähnen, wurde ein Wunsch des Referenten der *ersten* Auflage (*diese Acta,* 4 (1928—29), S. 255—256) erfüllt, indem die Abhängigkeit des Sinnes eines Symbols wie $\frac{\partial u}{\partial x}$ von dem Umstand, welche Größen neben x als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, ausführlich erläutert wurde.

L. Kalmár.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil IV, 1. Heft (Teubners math. Leitfäden, Band 33), unter Mitwirkung von OSKAR DEGOSANG, IV + 52 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

Das vorliegende Heft enthält 229 Aufgaben, die sich auf die beiden ersten Abschnitte des Teils I der *Höheren Mathematik* beziehen. 61 von diesen Aufgaben kommen auch im Teil I vor. Zu jeder Aufgabe ist das Ergebnis und in der Regel auch eine Anleitung zur Lösung angegeben. Die Aufgaben sind mannigfaltig, mehrere von ihnen haben gewisse Beziehungen zur Technik. Wir können diese Aufgabensammlung jedem Studierenden der Mathematik und Technik aufs wärmste empfehlen. Wir hoffen, daß die — übrigens nicht vielen — Druckfehler in der folgenden Auflage berichtigt werden.

Nagy.

Alfred Barneck, Die Grundlagen unserer Zeitrechnung, (Math.—Phys. Bibliothek, Band 29), zweite Auflage, IV + 49 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

Das vorliegende Büchlein betrachtet in drei Kapiteln die historische Entwicklung unserer Zeitmessung und Zeitrechnung. Im ersten Kapitel werden die Elemente der astronomischen Ortsbestimmung (das Horizontalund das Äquatorialsystem) besprochen, dann der Sterntag und die Sternzeit definiert. Die Sternzeit kann nur astronomischen Zwecken dienen, für das tägliche Leben hatte man die sogenannte Sonnenzeit eingeführt. Diese wird im Kapitel 2 besprochen. Es werden hier zunächst Weisungen zur verfertigung einer genauen Sonnenuhr gegeben. Nach Besprechnung des Ekliptikalsystems wird die Veränderlichkeit des Sonnentages und damit auch die der Sonnenstunde erklärt und aus praktischen Gründen die mittlere Sonnenzeit eingeführt. Es ist zu bedauern, daß auf die Variation des wahren Sonnentages im Laufe eines Jahres und speziell auf die beiden Maxima und Minima nicht näher eingegangen worden ist. Im Kapitel 3 wird an einigen Beispielen gezeigt, wie durch die rasche Entwicklung der Verkehrsmittel auch die mittlere Sonnenzeit (Ortszeit) für das tägliche Leben unbrauchbar wurde, und seinen Platz der Zonenzeit abtreten mußte. Es wird endlich die technische Ausführung der Verbreitung der von den Sternwarten bestimmten richtigen Zeit beschrieben. Die Figuren und eine Tabelle der Normalzeiten erleichtern das Verständnis.

F. Bukovszky.

Ludwig Bieberbach, Analytische Geometrie (Teubners math. Leitfäden, Band 29), zweite Auflage, V + 141 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

Die vorliegende zweite Auflage des Bieberbachschen Buches ist eine vermehrte und durchgesehene Ausgabe der ersten Auflage (Besprechung s. *diese Acta,* 5 (1930—32), S. 140—141). Der Text wurde sorfaltig durchgesehen und durchgearbeitet. Es wurden einige weiteren Beispiele und Ergänzungen eingefügt. Man findet z. B. eine ausführlichere Diskussion der Definition des Winkels. Der Verfasser betont die Wichtigkeit der axiomatischen Begründung der Geometrie noch nachdrücklicher als in der ersten Auflage. Die geometrische Bedeutung der Gruppentheorie und der Invarianten kommt in der neuen Auflage auch zur Geltung. Das Buch hat auch in typographischen Hinsicht eine übersichtlichere Form gewonnen.

St. Lipka.

Marshall Harvey Stone, Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XV), VIII + 622 pages, New-York, American Mathematical Society, 1932.

Not so long ago, Professor STONE has started with his investigations about linear transformations in Hilbert space in a few really interesting and really short papers. Today, I think, everyone of the guild greets with surprise but with wondering interest his present work, an exceptionally large handbook on the same subject both for the student and for the searcher. It was his intention, as he says, to present his results in some currents journals, but various circumstances as the lack of a detailed treatment starting with the foundations and carriing the development as far as possible in every direction, especially the lack of English-language works dealing with the theory, have led to the preparation of the volume, in which he has attempted to include not only contributions of his own but also a substantial portion of the existing material bearing on the subject.

What is more surprising, is the missing of some topics of first rate interest, especially of the authors personal work concerning group theoretic questions of fundamental importance in the quantum machanics. Not even the so-called STONE's Theorem, on the spectral resolution of linear groups of unitary transformations, a counterpart of HILBERT's classical theorem on the resolution of quadratic forms in infinitely many variables, is included in the volume. We are missing too the very important investigations of VON NEUMANN about the topological and algebraical features of spaces of commutative self-adjoint and normal transformations and on their simultaneous spectral resolution. Moreover, one vainly tries to look up the recent work of CARLEMAN, KOOPMAN, VON NEUMANN, BIRKHOFF and E. HOPF on problems connected with the ergodic hypothesis. All these topics, I suppose, had to be dealth with in the two chapters for which provision has originally be made but which have been omitted by considerations of space.

I am pleased to say that these first impressions on lack of completeness are highly contrebalanced by the masterly and minute exposition of the remaining matter. After a first chapter on abstract HILBERT space and its realisations, the second is dealing with a step by step analysis of the general transformation idea, leading to the different types of transformations, analysis that is really important later on for the thorough understanding of CARLEMAN's and VON NEUMANN's general theory of symmetric transformations. Chapter III, about examples, deals with some of the less difficult problems concerning differential and integral operators, including FOURIER and HANKEL transformations. In Chapter IV the fundamental problems concerning resolvents, spectra and reducibility are posed and investigated under a general aspect.

In the two following chapters the general theory of bounded or nonbounded self-adjoint transformations and the corresponding operational calculus are developed. The analysis depends, as in the authors original papers dealing with these topics, upon methods originated by STIELTJES and extended by CARLEMAN; later on the RADON-STIELTJES integral is introduced and used. May I express the opinion that a considerable amount of calculating trouble could have been spared by defining and using direct integration of transformations as functions of a parameter instead of going back to ordinary integrals by way of the corresponding bilinear operators, as well as by keeping to the symbolic method developed in the reviewers book, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, 1913, and improved and extended in a recent paper published in the fifth volume of *these Acta*.

The next chapter gives an up to date analysis of the really difficult problem of unitary equivalence of self-adjoint transformations as originated by HELLINGER in his *Thesis*, Göttingen, 1907 and in a paper in *Crelle's Journal*, 136, 1909. Chapter VIII is dealing with unitary transformations and more generally with normal ones; the corresponding facts are, as one knows, almost immediate consequences of the theory of self-adjoint transformations.

In Chapter IX the general symmetric transformation is exhaustively treated, first following, with occasional additions, VON NEUMANN's exposition in the *Mathematische Annalen*, 10 1929; later an abstract definition of „real" transformations in „complex" HILBERT space is given and analysed. The third section of this chapter is essentially a translation into abstract terms of CARLEMAN's results concerning sequences of integral operators, with some occasional extensions too.

The last chapter, on applications, more than a third of the whole, is one of the most significant and most instructive ones. So sorry, I am not allowed, by considerations of space, to go into the matter.

In summary, Professor STONE's book is a most excellent treatise for anyone wishing to penetrate into the theory as a whole.

I am much grateful to the author for his emphasizing, in the foreword, the rôle my own contributions played in preparing the ground for a successful consideration of non-bounded transformations. As a matter of fact, I feel really ashamed for that the decisive step, from the bounded type to the non-bounded one, had to be waited for so many years and finally had to be accomplished by others.

F. R.

D. Hilbert und S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XXXVII), VIII + 310 S., Berlin, J. Springer, 1932.

Zweck des Werkes ist die Geometrie in ihrem gegenwärtigen Zustand von der Seite des Anschaulichen aus zu betrachten. In sechs voneinander unabhängigen Kapiteln wird der Leser „in dem großen Garten der Geometrie spazieren geführt; jeder soll sich einen Strauß pflücken können, wie er ihm gefällt" (nach dem Wortlaut des Vorwortes). Im ersten Kapitel werden die einfachsten Kurven und Flächen behandelt, besonders die Kegelschnitte und die Flächen zweiter Ordnung; Fadenkonstruktionen und Stangenmodelle stehen im Mittelpunkt der Behandlung. Im zweiten Kapitel kommen reguläre Punktsysteme, Punktgitter in zwei-, drei- und mehrdimensionalen Räumen mit ihren zahlentheoretischen Beziehungen, Krystalle und die diskontinuierlichen Gruppen der Ebene und des Raumes zu Betrachtung. Im dritten Kapitel werden die Konfigurationen der projektiven Geometrie, sowie die Pascalsche, die Desarguesche und andere Konfigurationen untersucht. Im vierten Kapitel werden nach einer sehr anschaulichen Einführung in die Grundbegriffe der Differentialgeometrie Eigenschaften der Kugel, Verbiegungen von Flächen in sich, die nichteuklidischen Geometrien und Abbildungen von Flächen behandelt. [Die bibliographische Bemerkung auf S. 237 betreffend die Lösung des Plateauschen Problems könnte wohl mißverstanden werden; erst in neuester Zeit hat T. RADÓ eine Lösung des allgemeinen Plateauschen Problems gegeben; kurz nachher J. DOUGLAS eine andere, welche auch eine Verallgemeinerung des Problems mit erledigt — dieses Wortlaut würde den Sachverhalt besser ausdrücken.] Im fünften Kapitel werden kinematische Fragen, darunter Gelenkmechanismen, im sechsten Kapitel Fragen über anschauliche Topologie der Flächen besprochen.

B. v. K.

Paul Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie, V + 48 S, Berlin, J. Springer, 1932.

Das vorliegende Büchlein war zuerst als Anhang zu Hilberts Vorlesungen über *Anschauliche Geometrie* geplant, hat sich aber nachher etwas ausgedehnt und ist schließlich zu der jetzigen Gestalt gekommen, — so erfährt man es aus dem Vorwort.

In einer kurzen Einleitung werden grundlegende Tatsachen aus der Topologie in Hinsicht auf ihre Selbstverständlichkeit und auf ihre Gültigkeit betrachtet. Auf die Möglichkeit von drei ebenen Gebieten mit demselben Rand wird ebenfalls hingewiesen; diese Entdeckung rührt bekanntlich von BROUWER her; er hat dafür auch eine präzise Konstruktion gegeben, die den von YONEYAMA später gefundenen „Arbeitsplan" selbst an Übersichtlichkeit weit übertrifft. — Das Grundproblem der mengentheoretischen Topologie wird folgendermaßen formuliert: „Diejenigen mengentheoretischen Gebilde festzulegen, die einen Anschluß an das anschaulich gegebene Material der elementaren Polyedertopologie gestatten und somit verdienen, als — wenn auch allgemeinste — geometrische Figuren betrachtet zu werden". Mit dieser vernünftigen Formulierung des Grundproblems wird wohl jeder Topologe einverstanden sein. Es ist dann eine Geschmacksache, welche obere Schranke den Verallgemeinerungen gestellt wird. Nach der Ansicht des Referenten hat ALEXANDROFF auch in dieser Hinsicht das richtige Maß getroffen, indem er in einer allgemeinen Auffassung genügend breite Perspektive eröffnet um alles Wesentliche der konkreten Topologie einheitlich überblicken zu können — aber ohne auf das Pathologische zu großen Wert zu legen. Diese gesunde Tendenz ist auch für das vorliegende Büchlein charakteristisch. In dem ersten Kapitel wird der Begriff des Komplexes, in dem zweiten auf Grund eines üblichen Kompromisses der Begriff des algebraischen Komplexes erläutert. Im dritten Kapitel werden simpliziale Abbildungen und die grundlegenden Invarianzsätze der Topologie in einer sehr eleganten Form dargestellt.

B. v. K.

Karl Menger, Kurventheorie, herausgegeben unter Mitarbeit von GEORG NÖBELING (Mengertheoretische Geometrie in Ein-

zeldarstellungen, Band II), VI + 376 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

In dem vorliegenden Buch wird der dimensionstheoretische Kurvenbegriff einer systematischen Untersuchung zugrunde gelegt: ein Kontinuum K heißt eine Kurve, wenn jeder Punkt von K in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit K diskontinuierliche Durchschnitte haben. In einem einführenden Kapitel werden die „alten" Kurvenbegriffe besprochen; es wird festgestellt, daß keiner von ihnen dem dimensionstheoretischen Gesichtspunkt entspricht. Es wird nicht betont, jedoch ist es wahr, daß umgekehrt für viele Zwecke der „neue" Kurvenbegriff unangemessen ist. Auf Grund der neuen Definition wird eine „einheitliche und abgeschlossene Theorie der Kurven" entwickelt; dabei kommen manche auch für sich interessante Fragen zu Betrachtung, die anderen dienen zu einem möglichst vollständigen Aufbau der Theorie. Manche interessanten Resultate werden im Schlußkapitel gestreift, darunter der wichtige Satz von BROUWER betreffend die Übereinstimmung der Zusammenhangszahl und der Komponentenzahl des Komplementes für beliebige Kurven der Ebene. Unter den ungelösten Problemen wird die Frage erörtert, ob der Kreis unter allen im Kleinen zusammenhängenden Kurven durch Homogeneität charakterisiert ist; diese Frage verdient sicher eine zentrale Stellung in der „mengentheoretischen Geometrie". Hoffentlich wird sie in einem nächsten Band der Sammlung ihren Platz finden.

B. v. K.

Stefan Banach, Théorie des opérations linéaires (Monografje Matematyczne, Tom I), VIII + 254 pages, Warszawa, Seminarjum Matematyczne, 1932.

La théorie des opérations a pour objet l'étude des fonctions numériques et d'autres correspondances définies dans les espaces à une infinité de dimensions ou si l'on préfère, dans les ensembles abstraits. Les opérations linéaires, ce sont des fonctions et des correspondances linéaires, c'est-à-dire additives et continues dans des espaces vectoriels, espaces dans lesquels on a défini l'addition des éléments et leur multiplication par des nombres comme pour les vecteurs ordinaires.

La théorie générale des opérations linéaires qui fait l'objet du présent volume de M. BANACH, embrasse par ses méthodes toute une foule de problèmes variés, des problèmes d'existence en premier lieu, concernant les équations différentielles et les équations intégrales et plus généralement les équations fonctionnelles linéaires, les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, les séries de FOURIER, la sommation des séries divergentes et enfin, les fonctions continues sans dérivée. Bien que précédée par l'Analyse générale de E. H. MOORE et préparée par les recherches de M. FRÉCHET et d'autres sur les ensembles abstraits et bien qu'elle pût profiter des méthodes développées antérieurement pour des buts particuliers mais dont les auteurs ont déjà prévu et prédit l'efficacité générale, la théorie en question appartient presque entièrement à ces denières années. Son développement systématique est dû principalement à M. BANACH et à ses collaborateurs et c'est lui le géomètre le plus compétent de nous présenter l'état actuel de la théorie.

Il m'est impossible, en ces quelques lignes, de passer en revue la variété des problèmes considérés dans le livre et dont quelques uns, très raffinés, y sont posés pour la première fois. Quant aux méthodes, il y en a quelquesunes d'une extrème finesse, comme par exemple celle assise sur l'idée d'ensemble faiblement fermé d'opérations linéaires. Il y en a d'autres, peut-être pas moins efficaces, mais qui sont d'une simplicité épatante. Qu'il me soit permis d'en rapporter une, en particulier pour ceux qui ont peur des abstractions de trop grande généralité. Je commence par rappeler un théorème appartenant aux éléments de la théorie des ensembles, d'après lequel l'intervalle est un ensemble de seconde catégorie, c'est-à-dire qu'il ne peut être épuisé par une suite dénombrable d'ensembles non-denses. Il s'ensuit immédiatement qu'une suite de fonctions continues étant supposée d'être bornée en chaque point d'un intervalle, il y en a nécessairement un intervalle partiel où la suite est bornée uniformément. Ces théorèmes restent valables, avec des modifications évidentes, pour des ensembles parfaits au lieu des intervalles, situés dans des espaces à une ou à plusieurs dimensions. Ils remontent si je ne me trompe pas, à RENÉ BAIRE et à M. OSGOOD qui les ont établis indépendemment autour de 1900; ce dernier en a tiré parti, entre autres, pour en déduire un théorème important appartenant à la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables. Or, M. BANACH a observé que ces théorèmes restent valables, par des raisons immédiates et sous des hypothèses très générales, pour divers espaces à une infinité de dimensions, parmi lesquels le champ des fonctions continues, les divers champs de fonctions mesurables et en particulier l'espace de HILBERT, la continuité des opérations dans ces champs étant définie conformément aux problèmes envisagés. Quand il s'agit en particulier des opérations *linéaires,* il s'ensuit, eu égard encore à des raisons d'homogénéité, qu'une suite de telles opérations ne peut rester bornée en tout point sans rester bornée uniformément dans chaque partie bornée de l'espace considéré. D'une manière plus ou moins immédiate, ce théorème implique, oûtre ses applications aux problèmes d'inversion des transformations linéaires, la partie la plus essentielle des beaux théorèmes du regretté HAAR et de M. LEBESGUE sur la convergence des intégrales singulières, un théorème de MM. HELLINGER et TOEPLITZ d'après lequel la suite des réduites d'une forme quadratique à une infinité de variables ne pourra être convergente en tout point de l'espace de HILBERT sans que la forme ellemême soit bornée et enfin, l'existence de diverses catégories de fonctions continues sans dérivée. Ainsi le théorème de M. BANACH embrasse des résultats appartenant à des théories variées, résultats dont chacun représentait un réel accomplissement à l'époque de sa découverte.

Nous sommes enchantés de pouvoir saluer le prèmier volume des *Monographies Mathématiques* qui commencent sous d'heureux auspices.

F. R.