Elementare Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Von LUDWIG BERWALD in Prag.

Im Folgenden wird eine Anzahl elementarer Sätze bewiesen, die sich an bekannte Cauchysche Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung anschließen. Über die behandelten Fragestellungen, die (mit Ausnahme der des § 3) auf andere Autoren zurückgehen, orientieren die Einleitungen der einzelnen Paragraphen.

§ 1. Über einen Satz von A. Cohn.

1. Nach CAUCHY[1]) liegen bekanntlich alle Nullstellen eines Polynoms

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad (a_n \neq 0, \ |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| > 0) \tag{1}$$

in dem Kreisbereich

$$|z| \leqq p, \tag{2}$$

wo p die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$|a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + \ldots + |a_{n-1}| z^{n-1} - |a_n| z^n = 0 \tag{3}$$

ist. Herr COHN[2]) hat diese Aussage durch den Satz ergänzt, daß mindestens eine Nullstelle von $f(z)$ der Ungleichung

$$|z| \geqq p\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) \;{}^{3)} \tag{4}$$

1) A. L. CAUCHY, Sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination, *Exercices de Math.* (1829); *Oeuvres,* (2) **9**, S. 87—161.

2) A. COHN, Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise, *Math. Zeitschrift,* **14** (1922), S. 110—148, bes. S. 143 f.

3) $\sqrt[\nu]{2}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bedeutet im Folgenden stets den positiven Wurzelwert. Das Gleiche gilt allgemein für gebrochene Potenzen positiver Zahlen.

genügt, und daß in (4) das Gleichheitszeichen wirklich auftreten kann.

Herr COHN beweist seinen Satz mit Hilfe eines Satzes von GRACE[4]) über die Nullstellen apolarer Polynome. Der Satz kann aber viel einfacher bewiesen werden. Wir führen den Beweis sogleich für den etwas mehr aussagenden

Satz I. *Sind* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *die Wurzeln der Gleichung*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0, \quad (a_n \neq 0, \; |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| > 0) \tag{5}$$

und bedeutet p *die positive Wurzel der Gleichung*

$$|a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + \ldots + |a_{n-1}| z^{n-1} - |a_n| z^n = 0, \tag{6}$$

so gilt

$$p \geqq \frac{|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|}{n} \geqq p\left(\sqrt[n]{2} - 1\right). \tag{7}$$

In (7) *steht in der zweiten Ungleichung das Gleichheitszeichen für die Gleichungen* (5) *mit lauter gleichen Wurzeln und nur für diese.*

Beweis. Die erste Ungleichung (7) folgt aus dem angeführten Satze von CAUCHY. Zum Beweise der zweiten bezeichnen wir die k-te elementarsymmetrische Funktion von n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $\Sigma x_1 x_2 \ldots x_k$. Dann ist, wenn p die angegebene Bedeutung hat,

$$\tag{8} \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|}{n} + p\right)^n = \\ &\qquad = \left(\frac{(|z_1| + p) + (|z_2| + p) + \ldots + (|z_n| + p)}{n}\right)^n \geqq \\ &\geqq (|z_1| + p) \cdot (|z_2| + p) \ldots (|z_n| + p) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n| + p\, \Sigma |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_{n-1}| + \ldots + \\ &\qquad + p^k\, \Sigma |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_{n-k}| + \ldots + p^n \geqq \\ &\geqq |z_1 z_2 \ldots z_n| + p\, |\Sigma z_1 z_2 \ldots z_{n-1}| + \ldots + \\ &\qquad + p^k\, |\Sigma z_1 z_2 \ldots z_{n-k}| + \ldots + p^n = \\ &= \frac{|a_0| + |a_1| p + |a_2| p^2 + \ldots + |a_{n-1}| p^{n-1}}{|a_n|} + p^n = 2p^n. \end{aligned} \right.$$

Die erste Ungleichung (8) ist die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen;

[4]) J. H. GRACE, The zeros of a polynomial, *Proceedings Cambridge Phil. Soc.*, 11 (1900—1902), S. 352—357.

die übrigen sind evident. Wie aus (8) selbst hervorgeht, gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$. Aus (8) folgt unmittelbar (7).

Da das arithmetische Mittel von n nichtnegativen Zahlen nicht größer ist als die größte der Zahlen, so ist damit auch der Satz von COHN bewiesen. Ein *direkter* Beweis des Satzes von COHN ergibt sich aus

$$(|z_n|+p)^n \geqq (|z_1|+p) \cdot (|z_2|+p) \ldots (|z_n|+p),$$

wo z_n die absolut größte Wurzel der Gleichung (5) bedeutet.

2. Setzen wir in (5) $|a_0| \cdot |a_n| > 0$ voraus, so ergibt sich durch Anwendung des Satzes I auf die Gleichung

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) \equiv a_n + a_{n-1} z + a_{n-2} z^2 + \ldots + a_0 z^n = 0,$$

deren Wurzeln die reziproken Werte der Wurzeln von (5) sind:

$$\frac{1}{q} \geqq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|}\right) \geqq \frac{1}{q}(\sqrt[n]{2}-1),$$

wo $\dfrac{1}{q}$ die positive Wurzel der Gleichung

$$|a_n| + |a_{n-1}| z + \ldots + |a_1| z^{n-1} - |a_0| z^n = 0$$

ist. Es gilt also

Satz I'. *Sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0, \qquad (|a_0| \cdot |a_n| > 0)$$

und bedeutet q die einzige positive Wurzel der Gleichung

(9) $$|a_0| - |a_1| z - |a_2| z^2 - \ldots - |a_n| z^n = 0,$$

so ist

(10) $$q \leqq \frac{n}{\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|}} \leqq \frac{q}{\sqrt[n]{2}-1}.$$

In der zweiten Ungleichung (10) *steht das Gleichheitszeichen für die Gleichungen $f(z) = 0$ mit lauter gleichen Wurzeln und nur für diese.*

Bemerkung: *Haben $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dieselbe Bedeutung, wie im Satze I', und gilt*

(11) $$\frac{n}{\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|}} \geqq \frac{a}{\sqrt[n]{2}-1}, \qquad (a > 0)$$

so ist

(12) $$|a_0| - |a_1| a - |a_2| a^2 - \ldots - |a_\lambda| a^\lambda \geqq 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n).$$

Denn aus (10) und (11) folgt $a \leqq q$. Nun ist die linke Seite der Gleichung (9) für $z > 0$ eine monoton abnehmende Funktion von z. Sie ist für $z = q$ Null, also für $z = a$ nichtnegativ. Umsomehr gilt (12).

§ 2. Eine Fragestellung von St. Lipka.

3. Den Ausgangspunkt der Untersuchung des Herrn LIPKA[5]) bildet der wohlbekannte, aus dem Satz zu Beginn von Nr. **1** leicht ableitbare Satz von CAUCHY,[1]) daß alle Nullstellen des Polynoms (1) im Kreisinnern

$$(13) \qquad |z| < 1 + \frac{\operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)}{|a_n|}$$

liegen. Sie gehören also erst recht dem Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

an. Herr LIPKA stellt nun die Frage, wann alle Nullstellen des Polynoms (1) schon im Kreisinnern

$$(14) \qquad |z| < 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|}{|a_n|}, \qquad (0 \leqq k < n-1)$$

liegen und leitet eine hinreichende Bedingung dafür ab.[6]) Eine Verschärfung seines Satzes ist enthalten in dem folgenden

Satz II. *Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$(15) \qquad f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen:

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_{n-1}| \leqq |z_n|,$$

und k eine ganze Zahl,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Wenn

$$(16) \qquad \frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+1}|} + \frac{1}{|z_{k+2}|} + \ldots + \frac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{k}{n-1}}},$$

---

5) ST. LIPKA, Über die Abgrenzung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen, *diese Acta*, **3** (1927), S. 73—80.

6) a. a. O., Satz I., S. 73.

oder wenn

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{n-k-1}{\dfrac{1}{|z_{k+1}|}+\dfrac{1}{|z_{k+2}|}+\dots+\dfrac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \dfrac{a}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}, \\ |z_{k+1}|\cdot|z_{k+2}|\dots|z_{n-1}| \geqq \dfrac{1}{a^k}, \quad \left(0 < a < \left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}\right) \end{cases}$$

so liegen alle Wurzeln im Kreisinnern

$$(18)\qquad |z| < 1 + \frac{|a_0|+|a_1|+\dots+|a_k|}{|a_n|}.$$

Die Ungleichung (16) ist insbesondere erfüllt, wenn höchstens k Wurzeln (nämlich $z_1, z_2, \dots, z_k$) im Kreisinnern

$$|z| < \frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{k}{n-1}}}$$

liegen. Ersetzt man hierin die rechte Seite durch die für $0 \leqq k < n-2$ größere, für $k = n-2$ ebenso große Zahl $\dfrac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$, so ergibt sich der Satz des Herrn Lipka.

Beweis:[7] Wir setzen zunächst nur

$$(19)\qquad \frac{n-k-1}{\dfrac{1}{|z_{k+1}|}+\dfrac{1}{|z_{k+2}|}+\dots+\dfrac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}, \qquad (a>0)$$

voraus und schreiben $f(z)$ in der Form

$$f(z) = g(z)\,.\,h(z),$$

wo

$$(20)\quad \begin{cases} g(z) \equiv a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_k)(z-z_n) \equiv \\ \qquad\qquad \equiv \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_{k+1} z^{k+1}, \\ h(z) \equiv (z-z_{k+1})(z-z_{k+2})\dots(z-z_{n-1}) \equiv \\ \qquad\qquad \equiv \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_{n-k-2} z^{n-k-2} + z^{n-k-1}, \end{cases}$$

so daß die absolut größte Nullstelle von $g(z)$ mit der absolut größten Nullstelle von $f(z)$ identisch ist. Dann ist $|\beta_0| > 0$ und

$$(21)\qquad a_\mu = \alpha_\mu\beta_0 + \alpha_{\mu-1}\beta_1 + \dots + \alpha_0\beta_\mu, \qquad (\mu = 0, 1, \dots, n)$$

wobei

[7]) Der Grundgedanke des Beweises rührt von Herrn Lipka her.

$$\alpha_\varrho = 0, \text{ wenn } \varrho > k+1\,; \quad \beta_\varrho = 0, \text{ wenn } \varrho > n-k-1,$$

und

$$a_{k+1} = a_n, \quad \beta_{n-k-1} = 1.$$

Aus (21) folgt

$$(22)\quad \begin{cases} |\alpha_0| \cdot |\beta_0| = |a_0|, \\ |\alpha_1| \cdot |\beta_0| - |\alpha_0| \cdot |\beta_1| \leqq |a_1|, \\ |\alpha_2| \cdot |\beta_0| - |\alpha_1| \cdot |\beta_1| - |\alpha_0| \cdot |\beta_2| \leqq |a_2|, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |\alpha_\nu| \cdot |\beta_0| - |\alpha_{\nu-1}| \cdot |\beta_1| - \dots - |\alpha_2| \cdot |\beta_{\nu-2}| - \\ \qquad - |\alpha_1| \cdot |\beta_{\nu-1}| - |\alpha_0| \cdot |\beta_\nu| \leqq |a_\nu|, \end{cases}$$

wobei $0 \leqq \nu \leqq k < n-1$ sei. Nach der Bemerkung zum Satze I' ist wegen der Ungleichung (19)

$$(23)\quad |\beta_0| - |\beta_1| a - |\beta_2| a^2 - \dots - |\beta_\tau| a^\tau \geqq 0 \quad (\tau = 0, 1, \dots, n-k-1).$$

Wir multiplizieren die Ungleichungen (22) der Reihe nach mit $1, a, a^2, \dots, a^\nu$ und addieren. Dadurch ergibt sich

$$|\alpha_\nu| \cdot |\beta_0| a^\nu + |\alpha_{\nu-1}| (|\beta_0| - |\beta_1| a) a^{\nu-1} + \dots +$$
$$+ |\alpha_0| \cdot (|\beta_0| - |\beta_1| a - |\beta_2| a^2 - \dots - |\beta_\nu| a^\nu) \leqq$$
$$\leqq |a_0| + |a_1| a + \dots + |a_\nu| a^\nu \qquad (0 \leqq \nu \leqq k).$$

Wegen (23) sind die Koeffizienten von $|\alpha_\nu|, |\alpha_{\nu-1}|, \dots, |\alpha_0|$ alle nichtnegativ. Die Ungleichung bleibt daher richtig, wenn wir die Summe auf der linken Seite durch den ersten Summanden ersetzen. Wir erhalten so:

$$(24)\quad |\alpha_\nu| \leqq \frac{1}{|\beta_0|}\left(|a_\nu| + \frac{|a_{\nu-1}|}{a} + \frac{|a_{\nu-2}|}{a^2} + \dots + \frac{|a_0|}{a^\nu}\right) \qquad (0 \leqq \nu \leqq k).$$

Wenn nun

$$(25)\qquad |\beta_0| \geqq 1, \ |\beta_0| a \geqq 1, \ |\beta_0| a^2 \geqq 1, \dots, \ |\beta_0| a^k \geqq 1,$$

so ist

$$|\alpha_\nu| \leqq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_\nu| \leqq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_k|, \qquad (0 \leqq \nu \leqq k)$$

und daher auch

$$(26)\qquad \operatorname{Max}(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \dots, |\alpha_k|) \leqq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_k|.$$

Nach dem oben angeführten Satze von Cauchy liegen alle Nullstellen von $g(z)$ und daher auch von $f(z)$ in dem Kreisinnern

$$(27)\qquad |z| < 1 + \frac{\operatorname{Max}(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \dots, |\alpha_k|)}{|\alpha_{k+1}|},$$

also wegen (26) und $\alpha_{k+1} = a_n$ auch im Kreisinnern (18).

Die Bedingungen (25) reduzieren sich auf

$$(28)\quad |\beta_0| = |z_{k+1}| \cdot |z_{k+2}| \ldots |z_{n-1}| \geqq \operatorname{Max}\left(1, \frac{1}{a^k}\right) = \begin{cases} 1 & (a \geqq 1), \\ \frac{1}{a^k} & (0 < a < 1). \end{cases}$$

Wir zeigen jetzt, daß für

$$(29)\quad a \geqq \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}$$

die Ungleichung (28) aus der Ungleichung (19) folgt. Diese ergibt nämlich wegen der Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem harmonischen Mittel positiver Zahlen

$$|\beta_0| = |z_{k+1}| \cdot |z_{k+2}| \ldots |z_{n-1}| \geqq$$

$$(30)\quad \geqq \left(\frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+1}|} + \frac{1}{|z_{k+2}|} + \ldots + \frac{1}{|z_{n-1}|}}\right)^{n-k-1} \geqq \left(\frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}\right)^{n-k-1}.$$

Nun ist $0 \leqq k < n-1$. Für $a \geqq 1$ ist daher die rechte Seite von (30) nicht kleiner als 1, also (28) stets eine Folge von (30). Für $0 < a < 1$ folgt (28) aus (30) dann, wenn

$$\left(\frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}\right)^{n-k-1} \geqq \frac{1}{a^k},$$

woraus sich für a die Ungleichung (29) ergibt. Für die Werte von a, welche der Ungleichung (29) genügen, läßt sich die Ungleichung (19) durch (16) ersetzen. Für die Werte von $a > 0$, für die (29) nicht gilt, ist $\operatorname{Max}\left(1, \frac{1}{a^k}\right) = \frac{1}{a^k}$.

Damit ist Satz II vollständig bewiesen.

4. Dem letzten Satz ähnlich ist

Satz III. *Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$(31)\quad f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen:

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_{n-1}| \leqq |z_n|,$$

und k eine ganze Zahl,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Wenn

$$(32)\quad \frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+2}|} + \frac{1}{|z_{k+3}|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|}} \geqq \frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{k}{n-1}}},$$

oder wenn

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{n-k-1}{\dfrac{1}{|z_{k+2}|}+\dfrac{1}{|z_{k+3}|}+\dots+\dfrac{1}{|z_n|}} \geqq \dfrac{a}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}, \\ |z_{k+2}|\cdot|z_{k+3}|\dots|z_n| \geqq \dfrac{1}{a^k}, \quad \left(0 < a < \left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}\right) \end{cases}$$

so liegen mindestens $k+1$ *Wurzeln im Kreisinnern*

$$(34)\qquad |z| < 1 + \frac{|a_0|+|a_1|+\dots+|a_k|}{|a_n|}.$$

Die Ungleichung (32) ist insbesondere erfüllt, wenn höchstens $k+1$ Wurzeln (nämlich $z_1, z_2, \dots, z_{k+1}$) im Kreisinnern

$$|z| < \frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{k}{n-1}}}$$

liegen.

Der Beweis des Satzes III läßt sich fast wörtlich ebenso führen, wie der des Satzes II. Nur hat man jetzt $f(z)$ gemäß

$$f(z) = g_1(z)\cdot h_1(z)$$

zu zerlegen, wo

$$g_1(z) \equiv a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{k+1}) \equiv$$
$$\equiv \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_{k+1} z^{k+1},$$
$$h_1(z) \equiv (z-z_{k+2})(z-z_{k+3})\dots(z-z_n) \equiv$$
$$\equiv \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_{n-k-2} z^{n-k-2} + z^{n-k-1}$$

Der einzige wesentliche Unterschied gegenüber dem Beweise des Satzes II liegt darin, daß jetzt nicht mehr die absolut größte Nullstelle von $g_1(z)$ auch zugleich die absolut größte Nullstelle von $f(z)$ ist, sondern nur die absolut größte unter den $k+1$ Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_{k+1}$ von $f(z)$. Man kann daher nur von diesen Nullstellen aussagen, daß sie im Kreisinnern (34) liegen.

5. Im Falle $k=0$ lassen sich die Voraussetzungen des Satzes II weitgehend abschwächen. Man erhält so einen Satz, der für $j=n$ in folgendem Satze enthalten ist:

Sind $z_1, z_2, \dots, z_n$ *die Wurzeln der Gleichung* (31), *geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen, und gilt*

$$|z_1|\cdot|z_2|\dots|z_{j-1}|\cdot|z_{j+1}|\dots|z_n| \geqq 1, \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

so liegen mindestens j dieser Wurzeln im abgeschlossenen Kreisinnern

$$|z| \leqq \frac{|a_0|}{|a_n|}$$

$\left(\text{also erst recht im Kreisinnern } |z| < 1 + \frac{|a_0|}{|a_n|}\right)$.

Denn aus $1 \leqq |z_1| . |z_2| \ldots |z_{j-1}| . |z_{j+1}| \ldots |z_n|$ folgt

$$|z_j| \leqq |z_1| . |z_2| \ldots |z_{j-1}| . |z_j| . |z_{j+1}| \ldots |z_n| = \frac{|a_0|}{|a_n|}.$$

Aus Satz III ergibt sich (für $k = n-2$) der Satz von FEKETE,[8]) daß *die Gleichung* (31) *im Kreisinnern*

$$|z| < 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-2}|}{|a_n|}$$

mindestens $n-1$ *Wurzeln hat,* ferner folgende Verschärfung eines Satzes von LIPKA:[9])

Die Gleichung (31) *hat mindestens* $k+1$ *Wurzeln im Innern des Kreises um den Nullpunkt vom Radius*

$$\varrho = \text{Max}\left\{\frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{k}{n-1}}},\quad 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|}{|a_n|}\right\},$$

wobei k eine ganze Zahl bedeutet,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Mindestens eine Wurzel der Gleichung (31) liegt also stets im Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{|a_0|}{|a_n|}.$$

§ 3. Eine verwandte Fragestellung.

6. Der zu Beginn des § 2 angeführte Satz von CAUCHY legt die Frage nahe, *wann alle Nullstellen des Polynoms* (1) *schon im Kreisinnern*

---

[8]) Vgl. LIPKA, a. a. O., S. 78.

[9]) LIPKA, a. a. O., Satz II, S. 77. Dort steht $\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$ an Stelle von $\frac{1}{\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{k}{n-1}}}$.

$$|z| < 1 + \frac{\text{Max}\,(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|)}{|a_n|} \qquad (0 \leqq k < n-1) \tag{36}$$

liegen. Hierüber beweisen wir das folgende Gegenstück des Satzes II bei dieser Fragestellung:

Satz IV. *Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen:

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_{n-1}| \leqq |z_n|,$$

und k eine ganze Zahl,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Ferner sei z_0 die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$z^{n-1} - \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{n-k-1} \cdot (z^k + z^{k-1} + z^{k-2} + \ldots + 1) = 0, \tag{37}$$

so daß

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt[n-k-1]{2} - 1 \leqq \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}} &\leqq \\ \leqq z_0 < 1 + \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{n-k-1} &\leqq \sqrt[n-k-1]{2} \leqq 2, \end{aligned} \tag{38}$$

wo das erste Gleichheitszeichen nur für $k=0$ und $k=n-2$, das zweite nur für $k=0$, die übrigen nur für $k=n-2$ gelten.

Wenn

$$\frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+1}|} + \frac{1}{|z_{k+2}|} + \ldots + \frac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \tag{39}$$

oder wenn

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+1}|} + \frac{1}{|z_{k+2}|} + \ldots + \frac{1}{|z_{n-1}|}} \geqq \frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \\ &|z_{k+1}| \cdot |z_{k+2}| \ldots |z_{n-1}| \geqq 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^k}, \quad (0 < a < z_0) \end{aligned} \right. \tag{40}$$

so liegen alle Wurzeln von $f(z) = 0$ im Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{\text{Max}\,(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|)}{|a_n|}. \tag{41}$$

Die Ungleichung (39) ist insbesondere erfüllt, wenn höchstens k Wurzeln im Kreisinnern

$$|z| < \frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}$$

liegen.

Beweis. Wir setzen zunächst wieder nur die Ungleichung (19) voraus, zerlegen $f(z)$ wie beim Beweise des Satzes II und erhalten bei Verwendung derselben Bezeichnungen wie dort wieder die Ungleichungen (24). Nun ist wegen $a>0$ für $0\leqq\nu\leqq k$

$$|\alpha_\nu|+\frac{|\alpha_{\nu-1}|}{a}+\frac{|\alpha_{\nu-2}|}{a^2}+\ldots+\frac{|\alpha_0|}{a^\nu}\leqq$$
$$\leqq\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^\nu}\right).\ \mathrm{Max}\,(|\alpha_0|,|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_\nu|)\leqq$$
$$\leqq\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^k}\right).\ \mathrm{Max}\,(|\alpha_0|,|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_k|).$$

Die Ungleichungen (24) gehen also in

$$|\alpha_\nu|\leqq\frac{1}{|\beta_0|}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^k}\right).\mathrm{Max}\,(|\alpha_0|,|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_k|)$$
$$(0\leqq\nu\leqq k)$$

über, so daß

$$\mathrm{Max}\,(|\alpha_0|,|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_k|)\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{|\beta_0|}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^k}\right).\mathrm{Max}\,(|\alpha_0|,|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_k|) \tag{42}$$

ist. Somit wird

$$\mathrm{Max}\,(|\alpha_0|,|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_k|)\leqq\mathrm{Max}\,(|a_0|,|a_1|,\ldots,|a_k|), \tag{43}$$

sobald

$$|\beta_0|=|z_{k+1}|\,.\,|z_{k+2}|\ldots|z_{n-1}|\geqq 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^k},$$

d. h. sobald auch die zweite Ungleichung (40) mit $a>0$ gilt. Dann liegen wegen (43) und $\alpha_{k+1}=a_n$ nach dem Satze von Cauchy (§ 2, (13)) alle Nullstellen von $g(z)$, also auch von $f(z)$ im Kreisinnern (41).

Wir zeigen jetzt, daß für $a\geqq z_0$ die zweite Ungleichung (40) aus der ersten folgt. Aus dieser erhält man nämlich auf gleiche Weise wie im Beweise des Satzes II wieder

$$|\beta_0|\geqq\left(\frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}\right)^{n-k-1}$$

Hieraus folgt die zweite Ungleichung (40) dann, wenn

$$\frac{a^{n-k-1}}{\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{n-k-1}}\geqq 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^k}\qquad(a>0). \tag{44}$$

In (44) ist, wenn wir darin a als veränderlich ansehen, für $a>0$ die rechte Seite eine monoton abnehmende, die linke eine monoton zunehmende Funktion von a. Die kleinste positive Zahl a, die einer Ungleichung der Gestalt (44) genügt, ist daher die einzige positive Wurzel z_0 der Gleichung

$$z^{n-k-1} = \left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{n-k-1} \cdot \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^k}\right), \tag{45}$$

d. h. der Gleichung (37).

Wir leiten jetzt die Ungleichungen (38) ab. Verkleinern (bezw. vergrößern) wir die rechte Seite von (45), so erhalten wir eine Gleichung, deren einzige positive Wurzel kleiner (bezw. größer) als z_0 ist. Nun ist für $z>0$ und $k>0$ $\frac{1}{z^k}$ kleiner, für $z>1$ $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1}$ größer als die Summe rechts in (45). Somit ist die Wurzel $\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}}$ der Gleichung

$$z^{n-k-1} = \left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{n-k-1} \frac{1}{z^k} \tag{46}$$

für $0<k<n-1$ kleiner als z_0, für $k=0$ ebenso groß; die positive Wurzel ζ_0 der Gleichung

$$z^{n-k-1} - z^{n-k-2} = \left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{n-k-1} \tag{47}$$

größer als z_0. Es ist $\zeta_0>1$, da für $z>1-\frac{1}{n-k-1}$ die linke Seite der Gleichung (47) monoton zunimmt und für $0<z<1$ negativ ist. Anderseits bestätigt man leicht, daß

$$\zeta_0 \leqq 1+\left(\sqrt[n-k-1]{2}-1\right)^{n-k-1} \leqq \sqrt[n-k-1]{2} \leqq 2,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $k=n-2$ gilt.

7. Das Gegenstück des Satzes III bei der gegenwärtigen Fragestellung lautet:

Satz V. *Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Wurzeln der Gleichung*

$$f(z) \equiv a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n=0 \qquad (a_n \neq 0) \tag{48}$$

geordnet nach wachsenden Absolutbeträgen:

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_{n-1}| \leqq |z_n|,$$

und k eine ganze Zahl,

$$0 \leqq k < n-1.$$

Ferner sei z_0 die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$z^{n-1} - \left(\sqrt[n-k-1]{2} - 1\right)^{n-k-1} \cdot (z^k + z^{k-1} + z^{k-2} + \ldots + 1) = 0 \tag{49}$$

Wenn

$$\frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+2}|} + \frac{1}{|z_{k+3}|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|}} \geqq \frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \tag{50}$$

oder wenn

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{n-k-1}{\frac{1}{|z_{k+2}|} + \frac{1}{|z_{k+3}|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|}} \geqq \frac{a}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \\ &|z_{k+2}| \cdot |z_{k+3}| \ldots |z_n| \geqq 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^k}, \quad (0 < a < z_0) \end{aligned} \right. \tag{51}$$

so liegen mindestens $k+1$ Wurzeln von $f(z) = 0$ im Kreisinnern

$$|z| < 1 + \frac{\operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|)}{|a_n|}. \tag{52}$$

Die Ungleichung (50) ist insbesondere erfüllt, wenn höchstens $k+1$ Wurzeln im Kreisinnern

$$|z| < \frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}$$

liegen.

Der Beweis ist ganz analog zum Beweise des Satzes IV. Nur ist jetzt $f(z)$ so zu zerlegen, wie es beim Beweise des Satzes III geschehen ist.

8. Aus Satz V folgt schließlich noch:

Die Gleichung (48) *hat mindestens $k+1$ Wurzeln im Innern des Kreises um den Nullpunkt vom Radius*

$$r = \operatorname{Max}\left\{ \frac{z_0}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1}, \; 1 + \frac{\operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_k|)}{|a_n|} \right\},$$

wobei k eine ganze Zahl ist,

$$0 \leqq k < n-1$$

und z_0 die positive Wurzel der Gleichung (49) *bedeutet.*

Prag, Anfang Juli 1933.

(Eingegangen am 11. Juli 1933.)