Über die alternierende Gruppe.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ von n Elementen ist im Falle $n > 4$ bekanntlich einfach. Das bedeutet soviel: ist $\mathfrak{G}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{A}_n$, so wird $\mathfrak{G}$ entweder gleich $\mathfrak{A}_n$, oder gleich der Einheitsgruppe ausfallen. Einige der vorhandenen Beweise suchen eine solche Substitution S von $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, die möglichst wenig Elemente umsetzt.[1]) Die folgende Beweisanordnung gehört auch zu diesem Typus, der Punkt **1.** weist Vereinfachungen auf, die Punkte **2.** und **3.** sind bekannt.

1. Es soll also S möglichst wenig Elemente umsetzen. Zwei Fälle sind denkbar. Vorerst enthält S einen Zyklus von wenigstens 3 Elementen. Da $\mathfrak{A}_n$ eine S bestehend aus einem einzigen Zyklus von 4 Elementen nicht besitzt,[2]) hat S vom Grenzfalle $S=(123)$ abgesehen, die folgende Gestalt

$$S=(123\ldots)\ldots, \tag{1}$$

wo an Stelle von ... Elemente sein können. Bei geeigneter Bezeichnung enthält S jedenfalls noch die Elemente 4, 5. Es kann zweitens S aus lauter Zyklen von 2 Elementen bestehen. Vom Grenzfalle $S=(12)(34)$ abgesehen, hat S dann die Gestalt

$$S=(12)(34)\ldots, \tag{2}$$

[1]) Vgl. z. B. E. NETTO, *Vorlesungen über Algebra*, Bd. 2 (Leipzig, 1900), S. 310; B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, Bd. 1 (Berlin, 1930), S. 144—145; L. E. DICKSON—E. BODEWIG, *Höhere Algebra* (Leipzig und Berlin, 1929), S. 187—189.

[2]) Will man diese Tatsache nicht anwenden, so kann man folgenderweise schließen. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält mit $S=(1234)$ auch $S^2=(13)(24)$, also eine Substitution, bestehend aus zwei Zyklen von 2 Elementen. Diese Möglichkeit wird im Laufe des Beweises behandelt.

wo bei geeigneter Bezeichnung S noch jedenfalls das Element 5 enthält. Transformieren wir durch $\sigma = (345)$, so wird im Falle (1) bzw. (2)

$$\sigma^{-1} S \sigma = (124\ldots)\ldots \neq S, \text{ bzw. } \sigma^{-1} S \sigma = (12)(45)\ldots \neq S.$$

Beide Substitutionen vertauschen 1 gegen 2, somit setzt in beiden Fällen die Substitution

$$S^{-1}(\sigma^{-1} S \sigma) \neq E$$

weniger Elemente um als S, was gegen die Voraussetzung ist. Es bleiben für S nur die Grenzfälle möglich, im zweiten Falle transformieren wir wieder durch $\sigma = (345)$, es wird

$$\sigma^{-1}(12)(34)\sigma = (12)(45),\ S^{-1}(\sigma^{-1} S \sigma) = S(\sigma^{-1} S \sigma) = (354).$$

2. Ist also die Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Einheitsgruppe verschieden, so enthält sie eine Substitution bestehend aus einem einzigen Zyklus von 3 Elementen, z. B. $S = (123)$. Sehr einfach kann man $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_n$ beweisen.[3]) Bedeutet nämlich $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ eine beliebige Permutation von $123\ldots n$, so enthält $\mathfrak{A}_n$ eine der Substitutionen

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots n \\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots n \\ a_2 a_1 a_3 \ldots a_n \end{pmatrix}.$$

Da die Relationen

$$\varphi^{-1} S \varphi = (a_1 a_2 a_3),\ \psi^{-1} S \psi = (a_2 a_1 a_3),\ (a_2 a_1 a_3)^2 = (a_1 a_2 a_3)$$

bestehen, enthält $\mathfrak{G}$ die Substitution $(a_1 a_2 a_3)$. (Es ist hier nur $n > 2$ vorausgesetzt.) Die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält jede Substitution von $\mathfrak{A}_n$, da im Falle, daß a, b, c, d verschieden sind,

$$(ab)(ac) = (abc),\ (ab)(cd) = (ab)(ac)(ac)(cd) = (abc)(adc)$$

ausfallen.

3. Ist $\mathfrak{S}_n$ die symmetrische Gruppe von n Elementen, so besitzt $\mathfrak{S}_n$ im Falle $n > 4$ nur $\mathfrak{A}_n$ als eigentliche invariante Untergruppe. Der Beweis kann aus den Vorigen entnommen werden.

(Eingegangen am 7. September 1933.)

[3]) Vgl. O. Perron, *Algebra* (Berlin und Leipzig, 1927), Bd. 2, S. 119—121.