Ein neuer Beweis eines Satzes von Minkowski.

Von GEORG HAJÓS in Budapest.

Ich werde einen Beweis eines Satzes von MINKOWSKI liefern, der meines Wissens einfacher ist als die bisher bekannten Beweise. Der Satz lautet:[1])

Besitzt ein konvexer, bezüglich des Anfangspunktes O symmetrischer Bereich $\mathfrak{B}$ *in der Ebene des rechtwinkligen Koordinatensystems einen Inhalt größer als* 4, *so enthält* $\mathfrak{B}$ *einen von O verschiedenen Gitterpunkt als inneren Punkt.*

Beweis. Wir legen auf die Ebene ein mit den Achsen paralleles Quadratnetz mit der Maschenweite 2. Wir bringen die Netzquadrate samt den in ihnen enthaltenen Teilen von $\mathfrak{B}$ durch Parallelverschiebung mit einander in Deckung. Da der Gesamtinhalt dieser Teile größer als 4 ist, so gibt es mindestens zwei unter ihnen, die sich nach der Verschiebung wenigstens teilweise überdecken. Ein innerer Punkt der sich überdeckenden Teile bestimmt zwei solche Punkte P und Q des ursprünglichen Bereiches $\mathfrak{B}$, die sich nach der Verschiebung decken. P und Q sind dann solche innere Punkte von $\mathfrak{B}$, deren Koordinatendifferenzen gerade Zahlen sind. $\mathfrak{B}$ enthält infolge der Symmetrie auch den zu Q bezüglich O zentralsymmetrischen Punkt Q', ferner, wegen der Konvexität, auch den Mittelpunkt G der Strecke PQ' als innere Punkte. Da nun die Koordinaten von G gleich den Hälften der entsprechenden Koordinatendifferenzen von P und Q sind, so ist dieser innere Punkt G von $\mathfrak{B}$ ein Gitterpunkt.

---

[1]) H. MINKOWSKI, *Diophantische Approximationen* (Leipzig, 1907), S. 29.

Der Beweis gilt nach unmittelbaren Änderungen auch für den n-dimensionalen Raum und liefert den folgenden allgemeineren Satz von MINKOWSKI:[2])

Besitzt ein konvexer, bezüglich des Anfangspunktes O symmetrischer Bereich $\mathfrak{B}$ *im n-dimensionalen Koordinatenraum einen Inhalt größer als* 2^n, *so enthält* $\mathfrak{B}$ *einen von O verschiedenen Gitterpunkt (d. h. einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten) als inneren Punkt.*

(Eingegangen am 7. November 1932.)

[2]) H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1896), S. 76.