Zur Theorie des Hilbertschen Raumes.

Von Friedrich Riesz in Szeged.

1. Die folgenden anspruchslosen Bemerkungen betreffen die beiden wohlbekannten, für die Theorie des reellen oder komplexen Hilbertschen Raumes grundlegenden Sätze, die ich auch in einer früheren Arbeit der Behandlung an die Spitze stellte.[1])

Satz **A.** *Ist eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ nicht überall dicht in $\mathfrak{H}$, so gibt es ein Element g aus $\mathfrak{H}$ mit $|g|=1$, das zu allen Elementen aus $\mathfrak{L}$ orthogonal ist.*

Satz **B.** *Für jede lineare Funktion $l(f)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes „erzeugendes" Element g, so daß*

$$l(f)=(f,g).$$

Dabei ist unter einer linearen Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{H}$ eine Teilmenge zu verstehen, die mit f für jede komplexe Zahl c auch cf und mit f und g auch $f+g$ enthält. Eine in $\mathfrak{H}$ definierte (skalare) Funktion[2]) $l(f)$ heißt linear, wenn sie den Gleichungen $l(cf)=cl(f)$, $l(f+g)=l(f)+l(g)$ genügt und auf der Einheitskugel $|f|=1$ beschränkt ist.

Gewöhnlich stützt man den Beweis dieser beiden Sätze auf die Separabilität, d. i. auf das Vorhandensein einer abzählbaren, überall dichten Teilmenge des Hilbertschen Raumes; von dieser Teilmenge geht man auf bekannte Weise, durch die sogenannte Orthogonalisierung, zu einem vollständigen Orthogonalsystem und

---

[1]) Vgl., auch für die zugrunde liegenden Definitionen und Bezeichnungen, meine Arbeit: Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *diese Acta*, **5** (1930), S. 23—54.

[2]) Der Fall, wo $l(f)$ nur in einer in $\mathfrak{H}$ überall dichten linearen Mannigfaltigkeit definiert ist, braucht nicht besonders erörtert zu werden, da eine solche Funktion infolge der Linearitätsvoraussetzungen sich unmittelbar in eine in $\mathfrak{H}$ durchwegs definierte lineare Funktion erweitern läßt.

damit zur Darstellung des Raumes durch abzählbar viele Koordinaten über.[3])

Über Satz **A** habe ich in meiner angeführten Arbeit nebenbei bemerkt, daß dieser Satz auch ohne die Voraussetzung der Separabilität bewiesen werden kann, daß also der Satz von der durch dieses Postulat geforderten Dimensionsabgrenzung *nach oben* unabhängig ist. Ich dachte hiebei an die sich unmittelbar darbietende Übertragung einer von B. Levi für das Dirichletsche Prinzip schon in 1906 verwendeten Schlußweise.[4]) Aus Anfragen von verschiedenen Seiten ersehe ich, daß diese Schlußweise oder wenigstens ihre Verwendbarkeit für den Hilbertschen Raum nicht allgemein bekannt ist, so daß es gerechtfertigt erscheint, den Beweis in einer dem Wortlaute von Satz **A** entsprechenden Fassung und in teilweise vereinfachter Form hier durchzuführen.

Die unmittelbare Anregung zu diesen Zeilen verdanke ich der voranstehenden Arbeit,[5]) in welcher unter andern gezeigt wird, daß auch Satz **B** ohne Dimensionsabgrenzung nach oben richtig ist. Die Beweismethode besteht in einer Zurückführung des allgemeinen Falles auf den Hilbertschen. Ich werde hier zeigen — was mir seinerzeit entgangen ist — wie Satz **B** aus Satz **A** sozusagen unmittelbar folgt. Schließlich werde ich für Satz **B** auch einen direkten Beweis mitteilen. Dieser Beweis unterscheidet sich von jenem in der voranstehenden Arbeit (Sätze 12 und 13) dadurch, daß die ausschlaggebende Tatsache, daß nämlich die lineare Funktion $l(f)$ ihren Maximalwert auf der Einheitskugel $|f| = 1$ wirklich erreicht, aus einer elementaren Identität unmittelbar hervorgeht,

---

[3]) Vgl. z. B. M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space,* (New-York, 1932), S. 22 und 62.

[4]) B. Levi, Sul principio di Dirichlet, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* **22** (1906), S. 293–360, insbes. § 7. Vgl. auch H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig und Berlin, 1913), S. 101.

[5]) H. Löwig, Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl, *diese Acta,* **7** (1934), S. 1—33.

[Zusatz während der Korrektur. Vgl. auch die vor kurzem erschienene Arbeit: K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, *Math. Annalen,* **109** (1934), S. 465—487, insbes. S. 476—477, wo ein Korollar zu Satz **B**, über den Zusammenhang von beschränkten Bilinearformen und beschränkten Operatoren, ebenfalls ohne Orthogonalisierung, durch einen Gedankengang begründet wird, mit dem die hier unter **3** folgende Begründung von Satz **B** Berührungspunkte aufweist.]

die übrigens auch schon früher für den Beweis von Satz **A** verwendet wird und deren Inhalt, geometrisch gedeutet, im wohlbekannten Übereinstimmen der Quadratsumme der Diagonalen eines Parallelogramms mit jener der Seiten besteht.

2. Beweis von Satz A. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathfrak{L}$ abgeschlossen; laut Voraussetzung gibt es dann ein Element h aus $\mathfrak{H}$, das in $\mathfrak{L}$ nicht enthalten ist, für welches also die untere Grenze d der Werte

$$|h-f|=(h-f, h-f)^{1/2},$$

gebildet für sämtliche f aus $\mathfrak{L}$, von Null verschieden ist. Wir zeigen *a)* das Vorhandensein eines Elements f^* aus $\mathfrak{L}$, für welches genau

$$|h-f^*|=d \tag{1}$$

ausfällt und *b)* die Orthogonalitätsbeziehung

$$(h-f^*, f)=0 \tag{2}$$

für alle f aus $\mathfrak{L}$. Damit wird dann auch Satz **A** bewiesen sein, indem nämlich das Element

$$g=\frac{1}{d}(h-f^*)$$

das geforderte leistet.

Um *a)* zu zeigen, sei $\{f_n\}$ eine Extremalfolge aus $\mathfrak{L}$, d. i. es sei

$$|h-f_n|\to d. \tag{3}$$

Wir schließen hieraus, daß

$$|f_n-f_m|\to 0 \tag{4}$$

und damit das Vorhandensein eines Elementes f^* aus $\mathfrak{L}$, für welches $f_n\to f^*$, d. i.

$$|f^*-f_n|\to 0 \tag{5}$$

ist. Die Beziehung (1) folgt dann in wohlbekannter Weise aus (3) und (5) auf Grund der Dreiecksungleichung

$$|h-f^*|\leqq|h-f_n|+|f^*-f_n|.$$

Um *a)* zu zeigen, haben wir also die Richtigkeit von (4) zu beweisen. Zu diesem Zwecke verwenden wir die für je zwei Elemente von $\mathfrak{H}$ geltende Identität

$$|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2-|u+v|^2. \tag{6}$$

Wir setzen darin $u=h-f_m$, $v=h-f_n$, also $u+v=2\left(h-\frac{f_m+f_n}{2}\right)$

und bemerken, daß auch $\frac{f_m+f_n}{2}$ in $\mathfrak{L}$ enthalten ist, daß also

$$\left|h-\frac{f_m+f_n}{2}\right| \geqq d$$

ausfällt. Wir erhalten

$$|f_m-f_n|^2 \leqq 2|h-f_m|^2+2|h-f_n|^2-4d^2 \to 2d^2+2d^2-4d^2=0$$

für $m, n \to \infty$ und damit die Beziehung (4).

Die Behauptung *b)*, d. i. die Beziehung (2), trivial für $f=0$, ergibt sich sonst in bekannter Weise aus der Ungleichung

$$-\bar{\lambda}(h-f^*, f)-\lambda(f, h-f^*)+\lambda\bar{\lambda}(f, f)= \\ =|h-f^*-\lambda f|^2-|h-f^*|^2 \geqq 0,$$

indem man darin für λ und $\bar{\lambda}$ die ebenfalls konjugierten Werte

$$\frac{(h-f^*, f)}{(f, f)}, \quad \frac{(f, h-f^*)}{(f, f)}$$

einsetzt.

3. Übergang von Satz A auf Satz B. Die Gesamtheit der Nullstellen von $l(f)$, d. i. jener Elemente f, für welche $l(f)=0$ ausfällt, bildet eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$. Abgesehen vom trivialen Fall, wo $l(f)$ identisch verschwindet, füllt $\mathfrak{L}$ den Raum $\mathfrak{H}$ nicht aus und es gibt daher nach Satz **A** ein Element g_0 mit $|g_0|=1$, das zu allen Elementen aus $\mathfrak{L}$ orthogonal ist. Setzt man $g=\overline{l(g_0)}\,g_0$, so ist somit

(7) $$l(f)=(f, g)$$

sowohl für $f=g_0$, wie auch für alle Elemente f aus $\mathfrak{L}$. Ist nun f_1 ein beliebiges Element aus $\mathfrak{H}$, so setze man $f_0=f_1-\mu g_0$ mit

$$\mu=\frac{l(f_1)}{l(g_0)},$$

so daß also $l(f_0)=0$ wird. Dann ist $f_1=f_0+\mu g_0$ dargestellt als lineare Verbindung der beiden Elemente f_0 aus $\mathfrak{L}$ und g_0; da nun für $f=f_0$ und $f=g_0$ die Beziehung (7) besteht und da beide Seiten von (7) in bezug auf f distributiv sind, so gilt (7) auch für $f=f_1$.

Damit ist Satz **B** bewiesen.

4. Direkter Beweis von Satz B. Laut Voraussetzung ist die Funktion $l(f)$ auf der Einheitskugel $|f|=1$ beschränkt; sei M die obere Grenze von $|l(f)|$. Wir zeigen *a)* daß diese obere Grenze wirklich erreicht wird, nämlich daß es ein Element f^*

gibt mit $|f^*|=1$, $l(f^*)=M$; *b)* daß $g=Mf^*$ das durch den Satz geforderte leistet.

Um *a)* zu zeigen, sei $\{f_n\}$ eine Folge von Elementen mit $|f_n|=1$, $|l(f_n)|\to M$. Wir können sogar annehmen, die Werte $l(f_n)$ seien reell und nichtnegativ und es gelte somit $l(f_n)\to M$; man hat hiezu nur jedes f_n mit einem geeigneten Zahlenfaktor vom Betrag 1 zu multiplizieren. Setzen wir dann in Formel (6) $u=f_m$, $v=f_n$ und bemerken wir noch, daß allgemein $|l(f)|\leqq M|f|$, also auch

$$l(f_m)+l(f_n)=l(f_m+f_n)\leqq M|f_m+f_n|$$

ist, so erhalten wir

$$|f_m-f_n|^2=4-|f_m+f_n|^2\leqq 4-\frac{1}{M^2}[l(f_m)+l(f_n)]^2\to 4-\frac{1}{M^2}4M^2=0$$

und damit die Existenz eines Elementes f^* mit

$$|f^*-f_n|\to 0,$$

also auch

$$|f^*|=1,\ l(f^*)=M.$$

Die Behauptung *b)*, daß nämlich $l(f)$ durch die Formel (7) mit $g=Mf^*$ dargestellt wird, ist nun zunächst für $f=f^*$ klar. Ferner ist f^* orthogonal zu sämtlichen Nullstellen f von $l(f)$. Denn für diese f ist

$$M^2=[l(f^*)]^2=[l(f^*-\lambda f)]^2\leqq M^2|f^*-\lambda f|^2=$$
$$=M^2\left(1-\lambda(f,f^*)-\bar{\lambda}(f^*,f)+\lambda\bar{\lambda}(f,f)\right),$$

also

$$-\bar{\lambda}(f^*,f)-\lambda(f,f^*)+\lambda\bar{\lambda}(f,f)\geqq 0;$$

daraus folgt durch die schon benutzte Schlußweise, nämlich durch Einsetzen von

$$\lambda=\frac{(f^*,f)}{(f,f)},\quad \bar{\lambda}=\frac{(f,f^*)}{(f,f)},$$

die Ungleichung $-|(f,f^*)|^2\geqq 0$ und damit $(f,f^*)=0$.

Formel (7) gilt also sowohl für $f=f^*$, wie auch für sämtliche Nullstellen f_0 von $l(f)$. Daraus schließen wir ihre allgemeine Gültigkeit ebenso, wie vorhin beim Übergang von Satz **A** auf Satz **B**, nämlich auf Grund der Zerlegung $f=f_0+\mu f^*$ mit $l(f_0)=0$.

(Eingegangen am 30. April 1934)