

## Ein kombinatorischer Satz.<sup>1)</sup>

Von L. RÉDEI in Mezötúr.

Für jedes Paar  $a_i, a_k$  ( $i \neq k$ ) der Elemente einer endlichen Menge  $M = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ( $n \geq 2$ ) sei eine der Relationen  $a_i \rightarrow a_k$  und  $a_k \rightarrow a_i$  vorgeschrieben, so daß  $a_i \rightarrow a_k$  und  $a_k \rightarrow a_i$  einander ausschließen (das Zeichen „ $\rightarrow$ “ braucht aber nicht transitiv zu sein, d. h. aus  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$  folgt nicht notwendig  $x \rightarrow z$ ).

Die Permutation  $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$  von  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nenne ich *geordnet*, wenn  $a'_i \rightarrow a'_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) stattfindet. Dann gilt der Satz:

**I. Die Anzahl der geordneten Permutationen ist eine ungerade Zahl.<sup>2) 3)</sup>**

<sup>1)</sup> Der Inhalt dieser Arbeit (insbesondere Satz III) wurde in einer anderen Einstellung als Hilfssatz schon in der in ungarischer Sprache erschienenen Arbeit des Verfassers: A másodfokú valós számtest osztályszámáról s alapegységéről (Über die Klassenzahl und Fundamenteinheit des reellen quadratischen Zahlkörpers), *Mat. és természettud. értesítő*, 48 (1932), S. 648–682 veröffentlicht.

<sup>2)</sup> Ich gebe hier einige Äquivalente zu der in I gelösten Aufgabe an: **a)** Aus je zwei der Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sei ein „Paar“  $x, y$  gebildet, so daß  $x, y$  nach Belieben in der natürlichen Reihenfolge oder in Inversion stehen mögen. Die Permutationen der  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sind zu bilden, bei denen je zwei benachbarte Elemente ein „Paar“ bilden. **b)** Die Glieder einer Gesellschaft wollen sich in eine gerade Reihe stellen. Von je zwei Teilnehmern der Gesellschaft hatte aber einer und nur einer den anderen beleidigt, darum will keiner, daß ein solcher *unmittelbar* vor ihm stehe, der ihn beleidigt hatte. **c)** Gegebene positive Primzahlen der Gestalt  $4k + 3$  sind aneinanderzureihen, so daß jedes Glied (bis zum vorletzten) ein quadratischer Rest des (unmittelbar) folgenden sei. **d)** Man nimmt den zu den Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_n$  gehörigen vollen Graph, d. h. die Gesamtheit der Strecken  $A_i A_k$  und gibt jeder Strecke nach Belieben eine bestimmte Richtung. Man fragt um Permutationen  $A'_i$  der  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), bei welchen auch die Linie  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$

Allgemeiner<sup>4)</sup> gilt:

II. Die Anzahl der geordneten  $k$ -gliedrigen Variationen ( $k=2, 3, \dots, n$ ) ist kongruent  $\binom{n}{k} \pmod{2}$ ; es gibt stets wenigstens  $\binom{n}{k}$  solche Variationen.

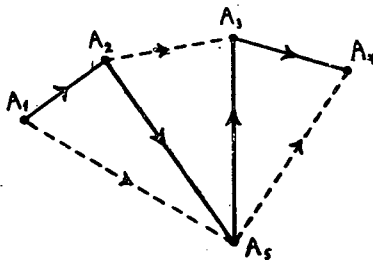
Dabei ist *geordnet* in ähnlichem Sinne zu deuten, wie bei Permutationen.

Modifiziert man die vorigen Feststellungen so, daß entweder  $x \rightarrow y$  und zugleich  $y \rightarrow x$ , oder weder  $x \rightarrow y$  noch  $y \rightarrow x$  bestehen, falls wenigstens eines der Elemente  $x, y$  zu einer bestimmten Teilmenge  $M_0$  von  $M$  gehört, für die Glieder von  $M - M_0$ <sup>5)</sup> sollen aber die ursprünglichen Bedingungen bestehen (insbesondere hat also  $M - M_0$  wenigstens zwei Elemente), so gilt auch die folgende Verallgemeinerung von I:

III. Die Anzahl der geordneten Permutationen ist gerade oder

gerichtet ist, d. h. die Einfahrt dieser Linie von  $A_1$  nach  $A_n$  stets gemäß den Streckenrichtungen geschieht.

<sup>3)</sup> Es gibt also stets wenigstens eine geordnete Permutation. Dies haben, nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn P. VERESS, er und unabhängig von ihm Herr D. KÖNIG, der Fassung d) in <sup>2)</sup> anschließend folgendermaßen bewiesen: Die Existenz ist trivial in den Fällen  $n=2, 3$ . Ist sie z. B. auch für  $n=4$  bestätigt, so gibt es durch die vier Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4$  eine Linie der vorgeschriebener Art; diese ist nach geeigneter Bezeichnung  $A_1 A_2 A_3 A_4$ . Ist nun  $A_1 A_5$  von  $A_5$  nach  $A_1$  gerichtet, so kann  $A_5$  der Linie  $A_1 \dots A_4$  als erster Punkt angeschlossen werden; ist  $A_4 A_5$  nach  $A_5$  gerichtet,



so ist die gewünschte, alle fünf Punkte verbindende Linie  $A_1 \dots A_4 A_5$ . Es braucht also nur noch der Fall untersucht zu werden, in dem keine der vorigen beiden Annahmen zutrifft, d. h.  $A_1 A_5$  nach  $A_5$ , und  $A_4 A_5$  von  $A_5$  nach  $A_4$  gerichtet ist. In diesem Falle muß aber in der Vektorenfolge  $A_1 A_5, A_2 A_5, \dots, A_4 A_5$  mindestens einmal ein Richtungswechsel stattfinden, es muß

also einen letzten Vektor, z. B.  $A_2 A_5$ , geben, der noch nach  $A_5$  gerichtet ist. Dann ist  $A_3 A_5$  von  $A_5$  nach  $A_3$  gerichtet, und somit ist in diesem Beispiel  $A_1 A_2 A_3 A_5 A_4$  eine Linie der vorgeschriebener Art. Der Beweisgang ist allgemeingültig.

<sup>4)</sup> Die Frage nach dieser Verallgemeinerung rührt von Herrn T. GRÜN-WALD her.

<sup>5)</sup>  $M - M_0$  ist die Komplementärmenge von  $M_0$  in bezug auf  $M$ .

ungerade, je nachdem  $M_0$  nicht leer oder leer ist, wenn nur diejenigen Permutationen betrachtet werden, deren erstes und letztes Element zu  $M - M_0$  gehören.<sup>6)</sup>

Es folgt II sogleich aus I, wenn man letzteres für jede  $k$ -gliedrige Kombination von  $M$  anwendet und dann addiert.

Es genügt also nur noch III zu beweisen.

Dazu definiere ich  $a_{ik} = 1$  oder 0, je nachdem  $a_i \rightarrow a_k$  besteht oder nicht. Ich setze überdies  $(i) = 0$  oder 1, je nachdem  $a_i$  zu  $M_0$  oder zu  $M - M_0$  gehört. Dann ist

$$(1) \quad a_{ik} + a_{ki} \equiv (i)(k) \pmod{2} \quad (i \neq k).^{7)}$$

Die Anzahl in III lautet ersichtlich

$$(2) \quad h = \sum (1)(n) a_{12} a_{23} a_{34} \dots a_{n-1, n},$$

wobei auf der rechten Seite die Summe auf sämtliche Permutationen von  $1, 2, \dots, n$  auszudehnen ist. (Ist  $M_0$  leer, so bleibt (1)( $n$ ) weg.)

$\{n\}$  soll die Menge  $(1, 2, \dots, n)$  bedeuten;  $e, e_1, e_2, \dots$  seien Teilmengen von  $\{n\}$ ; die leere Menge sei  $\mathbf{0}$ . Für  $e \subset \{n\}$  sei  $e' = \{n\} - e$  die Komplementärmenge von  $e$  in bezug auf  $\{n\}$ . Ich bezeichne mit  $e(D)$  denjenigen Hauptminor einer Determinante  $D$  der Ordnung  $n$ , bei welchen  $e$  die Menge der Indizes der Zeilen (und Spalten) ist, die zur Bildung des Minors angewendet sind;

<sup>6)</sup> Läßt man die letzte Forderung weg, so gilt keine Aussage von ähnlicher Allgemeinheit. — Auch III gestattet ähnliche Fassungen, wie I in der Fußnote <sup>2)</sup>. — Ich halte zwar die Verallgemeinerung III von I von weniger Bedeutung, doch habe ich sie aufgenommen, da ich nicht einmal I auf einem kürzeren Wege beweisen kann.

<sup>7)</sup> Sind die  $a_i$  verschiedene ungerade positive Primzahlen, von denen die von der Gestalt  $4m + 1$  die Menge  $M_0$  bilden, d. h.  $(i) = \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{-1}{a_i} \right) \right)$ , und ist  $a_{ik} = 1$  oder 0, je nachdem  $a_i$  quadratischer Rest von  $a_k$  ist oder nicht, d. h.  $a_{ik} = \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{a_i}{a_k} \right) \right)$ , so sind nach dem quadratischen Reziprozitätssatze die Voraussetzungen von III, d. h. (1) befriedigt; (1) ist dann nämlich nichts anderes, als eine andere Ausdrucksweise des quadratischen Reziprozitätssatzes für die Primzahlen  $a_i, a_k$ . In III handelt es sich in diesem Falle um gewisse Aneinanderreihen von Primzahlen (der Spezialfall, wo  $M_0$  leer ist, ist in der Fußnote <sup>2)</sup> unter c) ausführlich erklärt) und die entsprechende Behauptung ist offenbar nicht minder allgemein, als III selbst. D. h. in III handelt es sich im wesentlichen um eine Relation in Legedre-Symbolen (vgl. (2)).

es ist  $\mathbf{O}(D) = 1$  zu verstehen. Ein beliebiges Glied  $\pm a_{1b} a_{2c} \dots$  der Determinante  $|a_{ik}|$  und die Permutation  $(b, c, \dots)$  von  $1, 2, \dots, n$  nennen wir einander zugeordnet.

Es bezeichne  $A$  die Determinante  $|a_{ik}|$  ( $i$  den Reihenindex), und  $A_k$  die Determinante, die entsteht, wenn in  $A$  die  $k$ -te Spalte durch  $(k)(1), (k)(2), \dots, (k)(n)$  ersetzt wird.

Ich setze

$$(3) \quad S_k = \sum_{1 \in e} e(A_k) \cdot e'(A_k),$$

wobei  $e$  diejenigen Teilmengen von  $\{n\}$  durchläuft, die 1 enthalten.

Ich zeige zuerst, daß

$$(4) \quad h \equiv \sum_{k=1}^n S_k \pmod{2}.$$

Ein beliebiges Glied  $g$  des entwickelten  $S_k$  ist nämlich vom Vorzeichen abgesehen ein Glied von  $A_k$ ; als solches ist es zu einer Permutation  $c_1 c_2 \dots c_r$  der Elemente  $1, 2, \dots, n$  zugeordnet, wobei  $c_1, c_2, \dots, c_r$  Zyklen ohne gemeinsame Elemente sind (auch die eventuellen eingliedrigen Zyklen sind sämtlich aufzunehmen). Ist  $r=1$ , so kommt  $g$  unter den Gliedern von  $S_k$  nur einmal (nämlich für  $e = \{n\}$ ) vor und somit liefern diese  $g$  in (4) vom Vorzeichen abgesehen die Glieder von (2). Es genügt also noch zu beweisen, daß die Summe der Glieder von  $S_k$  mit  $r > 1$  kongruent 0 (mod 2) ist. Ich nehme an, wie gestattet, daß  $c_1$  das Element 1 enthält. Ist also  $r > 1$ , so seien  $c_u, c_v, \dots$  einige der Zyklen  $c_2, c_3, \dots, c_r$  und es bedeute  $e_0$  die Vereinigungsmenge der Elemente von  $c_1, c_u, c_v, \dots$ . Der zu  $e = e_0$  gehörige Summand von  $S_k$  enthält das ausgewählte Glied  $g$  multipliziert mit  $\pm 1$ , und ein anderes  $e$  kommt nicht in Betracht. Somit kommt  $\pm g$  in  $S_k$  genau  $2^{r-1}$ -mal vor ( $c_1, c_u, c_v, \dots$  besteht nämlich möglicherweise aus  $c_1$  allein), was eine gerade Zahl ist, und so erweist sich (4) als richtig.

Ich betrachte die Determinante  $\bar{A} = |\bar{a}_{ik}|$ , wobei

$$\bar{a}_{ik} = a_{ik} + (i)(k).$$

Leicht ersichtlich ist

$$(5) \quad \bar{A} = A + \sum_{k=1}^n A_k.$$

Andererseits ist nach (1)  $\bar{a}_{ik} \equiv a_{ki} \pmod{2}$ , wenn  $i \neq k$ , während  $\bar{a}_{ii} = (i)$ . Vertauscht man also Zeilen und Spalten in  $\bar{A}$ , so weicht

die erhaltene Determinante von  $A$  nur darin ab, daß die Hauptdiagonale  $0, 0, \dots, 0$  durch  $(1), (2), \dots, (n)$  ersetzt ist; entwickelt man dann nach den Elementen der Hauptdiagonale, so ergibt sich wegen (5)

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n A_k \equiv \sum_{e \neq \{n\}} e(A) \prod_{x \in e'} (x) \pmod{2},$$

wobei  $x$  im Produkt die Elemente von  $e'$  durchläuft.

Es bedeute  $\sum_k^* e(A_k)$  die Summe von  $e(A_k)$  über die  $k$  mit  $k \in e$ , es bedeute aber die Null, wenn  $e = \mathbf{O}$ . Dann ist nach (4) und (3)

$$(7) \quad h \equiv \sum_{1 \in e} (e'(A) \sum_k^* e(A_k) + e(A) \sum_k^* e'(A_k)) \pmod{2}$$

(es ist nämlich z. B.  $e'(A_k) = e'(A)$ , wenn  $k$  nicht in  $e'$  ist). Da aber  $e$  und  $e'$  zusammen alle Teilmengen von  $\{n\}$  durchlaufen, ist

$$(8) \quad h \equiv \sum_e e'(A) \sum_k^* e(A_k) \pmod{2}.$$

Wendet man (6) statt  $A$  auf  $e(A)$  an, so folgt

$$(9) \quad \sum_k^* e(A_k) \equiv \sum_{e_1 \subset e} e_1(A) \prod_{x \in e - e_1} (x) \pmod{2},$$

wobei der Strich neben dem Summenzeichen bedeutet, daß  $e_1 = e$  fortzulassen ist (offenbar ist (9) auch im Falle  $e = \mathbf{O}$  richtig, da dann die linke Seite verschwindet, und die rechtseitige Summe leer ist).

Berücksichtigt man (9) in (8), so hat man

$$(10) \quad h \equiv \sum_e \sum_{e_1 \subset e} e'(A) \cdot e_1(A) \prod_{x \in e - e_1} (x) \pmod{2}.$$

Alle Systeme  $e, e_1$ , die zu einem bestimmten  $e - e_1 \neq \{n\}$  führen, lassen sich in Paare zusammenfassen, und zwar ist  $e, e_1$  mit  $e'_1, e'$  zu paaren (es ist auch  $e' \subset e'_1$  und  $e' \neq e'_1$ , ferner  $e \neq e'_1$ , endlich  $e'_1 - e' = e - e_1$ ); die zugehörigen Glieder in (10) sind gleich und somit bleibt nur das dem Fall  $e - e_1 = \{n\}$  gehörige Glied übrig. Dann muß  $e = \{n\}$ ,  $e_1 = \mathbf{O}$  sein, woraus  $h \equiv (1)(2) \dots (n) \pmod{2}$ , d. h. III folgt.

(Eingegangen am 31. März 1933.)