Zum Mengerschen Graphensatz.

Von GEORG HAJÓS in Budapest.

1. MENGER[1]) hat einen Satz über Graphen ausgesprochen. Beweise dieses Satzes haben MENGER[2]) selbst und KÖNIG[3]) gegeben. Wir werden im folgenden einen neuen Beweis desselben Satzes geben.

Bezüglich der Benennungen halten wir uns zur Arbeit von KÖNIG,[3]) wir ergänzen sie aber noch mit den folgenden Festsetzungen:

Wir betrachten nur endliche Graphen, lassen aber auch solche Knotenpunkte zu, in welche keine Kanten führen.

Zwei Wege, die aus einem Punkt ausgehen, oder zwei Punkte verbinden, heißen *fremd,* wenn sie außer den gemeinsamen Endpunkten keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Die *Summe* zweier Graphen wird durch jene Punkte und Kanten gebildet, welche mindestens in einem vorkommen; das *Produkt* zweier Graphen durch jene, welche in beiden vorkommen.

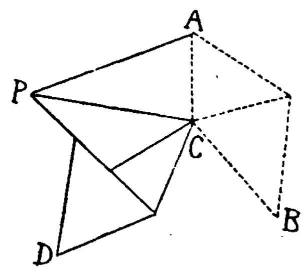
Ein *Grenzpunkt* des Teilgraphen G' von G ist ein solcher Knotenpunkt, der zu G' gehört, von dem aber in G auch eine solche Kante ausgeht, welche nicht zu G' gehört. Die Anzahl solcher Punkte von G' nennen wir die *Grenzpunktzahl* von G' bezüglich G und bezeichnen sie mit $G'(G)$.

1) K. MENGER, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fundamenta Mathematicae,* **10** (1927), S. 96—115.

2) K. MENGER, *Kurventheorie,* Leipzig (1932), S. 221—228.

3) D. KÖNIG, Über trennende Knotenpunkte in Graphen, *diese Acta,* **6** (1933), S. 155—179.

Wir führen noch einen Begriff ein, der im folgenden die Hauptrolle spielt. Betrachten wir in der nebenstehenden Figur die Knotenpunktmenge (A, B, C, D), so gibt es einen Teilgraphen (mit gestrichelten Kanten in der Figur), der P nicht enthält und aus der Punktmenge (A, B, C, D) drei Punkte (nämlich A, B, C) enthält, aber nur zwei Grenzpunkte hat (nämlich A und C). Betrachten wir aber die Punktmenge (A, C, D), so gibt es keinen ähnlichen Teilgraphen. Die Punkte dieser Menge liegen also sozusagen von P aus betrachtet in verschiedenen Richtungen, sie sind bezüglich P voneinander separiert. Wir setzen fest:



Eine Knotenpunktmenge von G nennen wir bezüglich des Knotenpunktes P s e p a r i e r t, wenn jeder den Punkt P nicht enthaltende Teilgraph G' von G höchstens $G'(G)$ Punkte aus dieser Knotenpunktmenge enthält.

2. Es sei eine Knotenpunktmenge K von G gegeben, die aus k Punkten besteht und P sei ein Knotenpunkt, der nicht zu K gehört.

H i l f s s a t z. *Ist K bezüglich P separiert, so gibt es k fremde Wege in G, die P mit je einem Punkt von K verbinden.*

Wir nehmen an, daß unser Hilfssatz für Graphen mit einer kleineren Kantenzahl, als G, richtig ist (I); wenn wir daraus die Richtigkeit unserer Behauptung für G folgern können, so ist der Hilfssatz bewiesen, da er für Graphen mit einer einzigen Kante evident ist.

Es sei K eine aus k Punkten bestehende, bezüglich P separierte Knotenpunktmenge von G (II). Kein Punkt von K ist nur mit Punkten von K benachbart, sonst würde dieser Punkt samt seinen Kanten und deren Endpunkten einen mit II unverträglichen Graphen bilden. Wenn jeder Punkt von K mit P benachbart ist, so ist unser Hilfssatz evident. Wir dürfen also annehmen, daß es in K einen Punkt A gibt, welcher mit dem von P verschiedenen und nicht zu K gehörenden Punkt B benachbart ist. Die Menge aller Kanten AB bezeichnen wir mit (AB).

Durch Weglassen von (AB) aus G erhalten wir den Graphen G_1; durch Weglassen von A samt seinen Kanten erhalten wir G_2.

Durch Weglassen von A aus K erhalten wir die Knotenpunktmenge K'.

Wir behaupten, daß *entweder* K *in* G_1, *oder* $B+K'$ *in* G_2 *bezüglich* P *separiert ist.* Daraus folgt gemäß I, daß in G nach diesen und auch nach K fremde Wege von P führen (im zweiten Falle schließen wir an den Weg PB eine Kante BA an).

Nehmen wir das Gegenteil unserer Behauptung an. G_1 besitzt dann einen P nicht enthaltenden Teilgraphen G_1', welcher k_1 Punkte von K enthält, wobei $k_1 > G_1'(G_1)$. G_1' kann B nicht enthalten, sonst wäre $G_1'+(AB)$ in Widerspruch zu II. G_1' enthält aber A und alle seine Kanten außer (AB), sonst wäre G_1' in Widerspruch zu II. Es ist also $G_1'(G) = G_1'(G_1)+1$; da aber $G_1'(G_1) < k_1$ und wegen II $G_1'(G) \geqq k_1$ ist, so ist $G_1'(G) = k_1$.

Ähnlicherweise besitzt G_2 einen Teilgraphen G_2', welcher k_2 Punkte von $B+K'$ enthält, P aber nicht und es ist $k_2 > G_2'(G_2)$. G_2' enthält mindestens einen zu A benachbarten Punkt, sonst wäre G_2' in Widerspruch zu II. Wenn wir A und jene Kanten, die A mit Punkten von G_2' verbinden, zu G_2' anschließen, erhalten wir einen Graphen G_2''. G_2' enthält B, sonst enthielte G_2' k_2 Punkte von K, also wäre G_2'' in Widerspruch zu II. G_2' enthält aber nicht alle zu A benachbarten Punkte, da dann G_2'' in Widerspruch zu II wäre. G_2'' enthält also (AB) und A ist einer seiner Grenzpunkte in G, ferner enthält G_2'' k_2 Punkte von K; daher ist gemäß II $G_2''(G) \geqq k_2$. Da andererseits $G_2''(G) = G_2'(G_2)+1$ und $G_2'(G_2) < k_2$ ist, so ist $G_2''(G) = k_2$.

Dies alles zusammenfassend: G_1' enthält k_1 Punkte, G_2'' enthält k_2 Punkte von K und ihre Grenzpunktzahlen bezüglich G sind ebenfalls k_1 resp. k_2. A ist ein Grenzpunkt von beiden, G_2'' enthält (AB), G_1' alle andere Kanten von A.

Es sei $G_1'+G_2'' = G'$ und $G_1' . G_2'' = H$ (H ist eventuell leer); H enthalte h Punkte von K, G' enthält also k_1+k_2-h Punkte. Wir erhalten $G'(G)$, indem wir $G_1'(G)+G_2''(G)$, also k_1+k_2 durch $H(G)$ und durch die Anzahl derjenigen gemeinsamen Grenzpunkte von G_1' und G_2'' vermindern, welche keine Grenzpunkte von G' bezüglich G sind. (Es gibt mindestens einen solchen Punkt, nämlich A.) Wegen II ist $H(G) \geqq h$. Folglich ist $G'(G) < k_1+k_2-h$, G' ist also in Widerspruch zu II. Damit haben wir unseren Hilfssatz bewiesen.

3. Es seien P und Q zwei Punkte von G. Der Mengersche Satz behauptet:

Wenn P und Q nicht durch weniger als k Punkte getrennt werden können, so gibt es k fremde PQ Wege in G.

Es sei K eine trennende Punktmenge, die aus k Punkten besteht. Es sei G_1 die Summe der von P nach K und G_2 der von Q nach K führenden Wege. G_1 und G_2 haben keine gemeinsamen Punkte außer K, sonst gäbe es einen zu K fremden Weg PQ. Es genügt also zu beweisen, daß k fremde Wege in G_1 von P nach K führen.

Dies folgt aber aus unserem Hilfssatz, da K in G_1 bezüglich P separiert ist. Sonst hätte nämlich G_1 einen Teilgraphen G_1', welcher aus K mehr als $G_1'(G_1)$ Punkte enthielte. Wenn wir also in K die in G_1' enthaltenen Punkte mit den Grenzpunkten von G_1' bezüglich G_1 ersetzten, erhielten wir weniger als k Punkte, die P von Q trennen würden, gegen unsere Annahme.

Damit haben wir den *Mengerschen Satz,* oder wie Menger ihn nennt den *n-Kettensatz* bewiesen, der auch folgenderweise ausgesprochen werden kann:

Wenn die Knotenpunktmengen H und I des Graphen G durch nicht weniger als k Punkte getrennt werden können, so gibt es k fremde HI-Wege in G.

(Eingegangen am 20. November 1933.)