Sur les équations définissant une matrice en fonction algébrique d'une autre.

Par Adolphe Szücs à Budapest.

Frobenius a démontré[1]) que, A étant une matrice quadratique à déterminant non nul, il est possible de trouver un polynome $X(u)$ à coefficients numériques, vérifiant l'équation

$$X^2 = A \tag{1}$$

quand on remplace dans le polynome $X(u)$ la variable u par la matrice A.

L'équation (1) a été généralisée. Pour les renseignements historiques et bibliographiques, nous renvoyons au livre de M. Mac Duffee,[2]) et nous nous bornerons à signaler que M. William E. Roth[3]) a résolu sous certaines conditions l'équation

$$P(X) = A, \tag{2}$$

$P(X)$ étant un polynome quelconque à coefficients numériques. Là encore, il faut entendre par solution un polynome en A. Évidemment on peut toujours supposer que le degré de ce polynome est inférieur à celui de l'équation caractéristique de la matrice.

Nous nous proposons de faire un nouveau pas et d'examiner l'équation

$$F(X, A) = 0 \tag{3}$$

où $F(x, u)$ est un polynome ordinaire quelconque. Le problème consiste à trouver un polynome $X(u)$ tel qu'on ait

$$F(X(A), A) = 0.$$

---

[1]) G. Frobenius, Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1896, p. 7—16.

[2]) C. C. Mac Duffee, *The Theory of Matrices* (Berlin, 1933), p. 94—97.

[3]) W. E. Roth, A Solution of the Matric Equation $P(X) = A$, *Transactions of the American Mathematical Society*, **30** (1928), p. 579—596.

Voici le résultat:

Soient $a, b, \ldots$ les racines simples et $a', b', \ldots$ les racines multiples de l'équation caractéristique $f(u) = 0$ de la matrice A. Si chacune des équations

$$F(x, a) = 0, \ F(x, b) = 0, \ldots \tag{4}$$

admet au moins une racine, et chacune des équations

$$F(x, a') = 0, \ F(x, b') = 0, \ldots \tag{5}$$

au moins une racine simple, alors l'équation

$$F(X, A) = 0$$

peut être vérifiée par un polynome en A.

Supposons en effet qu'un tel polynome $X(A)$ existe. Alors $F(X(A), A) = 0$, donc — d'après un résultat connu — $F(X(u), u)$ est divisible par le polynome caractéristique $f(u)$. Inversement, si $F(X(u), u)$ est divisible par $f(u)$, le polynome $X(u)$ représente une solution du problème.

Or, si

$$f(u) \equiv (u-a)\,(u-b) \ldots (u-a')^{\alpha}\,(u-b')^{\beta} \ldots \qquad (\alpha > 1, \beta > 1, \ldots)$$

la divisibilité de $F(X(u), u)$ par $f(u)$ exige d'abord

$$F(X(a), a) = 0, \quad F(X(b), b) = 0, \ldots \tag{6}$$

$$F(X(a'), a') = 0, \quad F(X(b'), b') = 0, \ldots \tag{7}$$

Soient donc $a_1, b_1, \ldots; a_1', b_1', \ldots$ racines des équations (4) et (5) et posons

$$X(a) = a_1, \quad X(b) = b_1, \ldots$$
$$X(a') = a_1', \quad X(b') = b_1', \ldots$$

Il faut avoir encore, dans le cas des racines multiples,

$$\begin{aligned} &\frac{d^k}{da'^k} F(X(a'), a') = 0, \qquad (k = 1, 2 \ldots \alpha - 1) \\ &\frac{d^l}{db'^l} F(X(b'), b') = 0, \qquad (l = 1, 2 \ldots \beta - 1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

ou, en développant par exemple la première de ces conditions,

$$\begin{aligned} X'\,(a')\,F_x(a_1', a') + F_u(a_1', a') &= 0 \\ X''\,(a')\,F_x(a_1', a') + \ \ldots \ \ &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

donc $X'(a'), X''(a'), \ldots$ se déterminent sans ambiguïté si a_1', $b_1', \ldots$ sont racines simples de (5) ce que nous supposons.

En définitive, on connaîtra les valeurs de $X(u)$ aux points $a, b, \ldots; a', b', \ldots$ et ses dérivées en a' jusqu'à l'ordre $\alpha-1$, en b' jusqu'à l'ordre $\beta-1$, etc. Le nombre de ces données est égal au degré n du polynome caractéristique. Par l'interpolation d'Hermite, on peut déterminer un polynome $X(u)$ de degré n prenant avec ses dérivées les valeurs prescrites en $a, b, \ldots;$ $a', b', \ldots$ Le probléme est donc résolu.

La solution n'est pas unique, car le choix des racines des équations (4) et (5) est, dans une certaine mesure, arbitraire. Soit m le degré de $F(x, u)$ en x. Le nombre maximum des solutions est atteint si l'équation caractéristique ainsi que les équations (4) et (5) n'ont que des racines simples. Ce nombre maximum est m^n.

Revenons au cas examiné par FROBENIUS ($X^2=A$). La condition suffisante que nous avons trouvée revient à exiger qu'on ait $2x \neq 0$ chaque fois qu'on remplace x par la racine carrée d'une racine multiple de l'équation caractéristique, c'est-à-dire que l'équation caractéristique n'admette pas zéro comme racine multiple. Quand le déterminant de la matrice A n'est pas nul, cette condition est évidemment vérifiée.

(Reçu le 19 mai 1934.)