Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes.*)

Von Tibor Schönberger in Rákoshegy.

In einem Graphen können dreierlei Kanten vorkommen: 1) *gewöhnliche Kanten*, die zwei verschiedene Knotenpunkte miteinander verbinden, 2) *Schlingen*, d. h. Kanten, die von einem Knotenpunkte ausgehend, wieder in denselben zurückkehren, 3) Kreise, die keinen Knotenpunkt enthalten. Eine solche Kante wird im folgenden *Reif* genannt.

Die Zahl der Kanten, die in einem Knotenpunkte des Graphen zusammenlaufen, heißt der *Grad des Knotenpunktes*. Die Schlinge wird hier für zwei Kanten gerechnet.

Ein Graph heißt *regulär*, wenn jeder seiner Knotenpunkte den gleichen Grad besitzt. Dieser Grad wird der *Grad des Graphen* genannt.

Eine *Brücke* ist eine gewöhnliche Kante des Graphen, deren beide Endpunkte im Graphen miteinander nur durch einen einzigen Weg verbunden sind: durch die Kante selbst. Eine Brücke kann demnach kein Teil eines im Graphen enthaltenen Kreises sein. Wenn aber eine gewöhnliche Kante keine Brücke ist, dann ist sie immer ein Teil eines solchen Kreises.

Ein *Blatt* ist ein Teil des Graphen, der mit dem übrigen Teile desselben nur durch eine Brücke zusammenhängt, selbst aber keine Brücke enthält.

Ein regulärer Graph dritten Grades wird *einfach* genannt, wenn er zusammenhängend ist und keine Brücke enthält. Besteht ein Graph bloß aus einem Reife, so wird er nicht als einfacher Graph betrachtet. Wenn der Graph außer dem Reife auch noch

*) Diese Arbeit wurde am 16. Nov. 1931. der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

einen anderen Teil hat, dann ist er nicht zusammenhängend. Gibt es eine Schlinge in einem regulären Graphen dritten Grades, so gibt es auch eine Brücke in demselben, da die Schlinge mit dem übrigen Teile des Graphen durch eine Brücke zusammenhängt. Ein einfacher Graph kann also weder einen Reif, noch eine Schlinge enthalten, so daß jede seiner Kanten eine gewöhnliche Kante ist.

Die *Ordnung* eines Graphen bedeutet die Zahl seiner Knotenpunkte.

Ein regulärer Graph heißt *primitiv*, wenn er sich nicht in zwei reguläre Graphen derselben Ordnung, aber niedrigeren Grades zerlegen läßt. SYLVESTER hat durch ein Beispiel (Fig. 1) gezeigt, daß es einen regulären, primitiven Graphen dritten Grades gibt. Wie es ersichtlich ist, enthält dieser Graph drei Blätter. Petersens Satz sagt aus, daß ein regulärer, primitiver Graph dritten Grades wenigstens drei Blätter enthält.

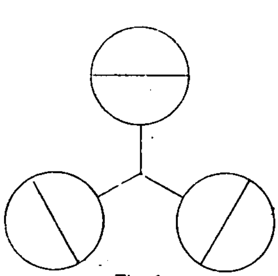

Fig. 1.

Den von PETERSEN stammenden langen und schwierigen Beweis dieses Satzes[1]) haben BRAHANA,[2]) ERRERA[3]) und FRINK[4]) vereinfacht. Der nachstehende Beweis hängt gewissermaßen mit der Frinkschen Arbeit zusammen und enthält auch Teile, die aus dieser übernommen wurden.[5])

Es sei x_1' ein stetiges Linienstück einer Kante eines regulären Graphen dritten Grades, und beide, voneinander verschiedene End-

---

[1]) J. PETERSEN, Die Theorie der regulären Graphs, *Acta Mathematica*, 15 (1891), S. 193—220.

[2]) H. R. BRAHANA, A Proof of Petersen's Theorem, *Annals of Mathematics* (2), **19** (1917), S. 59—63.

[3]) A. ERRERA, *Du coloriage des cartes et de quelques questions d'analysis situs*, thèse (Bruxelles, 1921), S. 16—20.

[4]) O. FRINK JR., A Proof of Petersen's Theorem, *Annals of Mathematics* (2), **27** (1926), S. 491—493.

[5]) Die übernommenen Teile sind: der Satz I, doch nicht der Beweis, ferner Satz III, samt dem Beweise. Für den Satz I gebe ich einen neuen Beweis, da der von FRINK gegebene nicht befriedigend ist.

Petersens Satz habe ich unabhängig vom Frinkschen Aufsatze bewiesen, ebenfalls auf Grund des Satzes I, den ich selbständig gefunden, aber in einer etwas abweichenden Form: ohne die Bedingung des Zusammenhanges des Graphen ausgesprochen habe.

punkte von x_1' seien innere Punkte der Kante, also keine Knotenpunkte. Es sei ferner x_1'' ein anderes, dieselben Eigenschaften besitzendes Linienstück des Graphen. x_1' und x_1'' können entweder *in zwei verschiedenen Kanten, oder in einer und derselben Kante* enthalten sein. Mit Rücksicht auf den letzteren Fall verlangen wir, daß x_1' und x_1'' weder innere Punkte, noch Endpunkte gemeinsam haben sollen.

Legen wir die beiden stetigen Linienstücke aufeinander, so daß sie sich vollständig decken sollen und *vereinigen* wir sie zu einem einzigen stetigen Linienstücke. Dann vereinigen sich x_1' und x_1'' zu einer Kante x, die zwei verschiedene, durch die Vereinigung entstandene Knotenpunkte dritten Grades miteinander verbindet, also eine gewöhnliche Kante ist (Fig. 2). Das Verfahren der Vereinigung wird im folgenden die *Verschmelzung* und x_1', bzw. x_1'' eine *Verschmelzende* der Kante x genannt. Jede Verschmelzung erzeugt zwei neue Knotenpunkte, vermehrt also die Ordnung des Graphen um zwei.

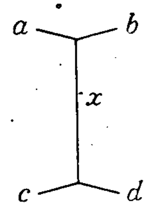

Fig. 2.

Das Verfahren der Verschmelzung läßt sich auch umkehren, indem wir eine gewöhnliche Kante x (Fig. 2) eines regulären Graphen dritten Grades als eine solche betrachten, die durch Verschmelzung entstanden ist und sie in die beiden Verschmelzenden zerlegen. Dieses Verfahren wird im folgenden die *Zerspaltung* der Kante x genannt. Die Zerspaltung läßt sich auf zweierlei Arten durchführen. Im ersten Falle spaltet sich x in die Verschmelzenden x_1' und x_1'' (Fig. 3),[6]) die a mit c, bzw. b mit d, im zweiten Falle in die Verschmelzenden x_2' und x_2'' (Fig. 4), die a mit d, bzw. b mit c verbinden. Jede Zerspaltung schafft zwei vorhandene Knotenpunkte ab, vermindert also die Ordnung des Graphen um zwei.

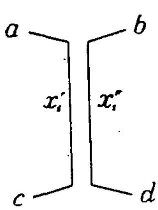

Fig. 3.

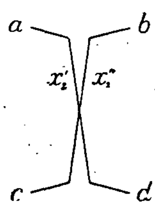

Fig. 4.

Satz I. *In jedem einfachen Graphen von höherer als zweiter Ordnung kann man eine beliebige Kante so zerspalten, daß der entstehende neue Graph ebenfalls einfach sei.*

[6]) Die Bruchpunkte der in Fig. 3, 4, 5 und 7 dargestellen Linien bezeichnen die Endpunkte der Verschmelzenden, sind also *keine* Knotenpunkte.

Es sei G ein einfacher Graph von höherer als zweiter Ordnung und x eine beliebige Kante desselben. Die zweierlei Zerspaltungen von x ergeben zwei verschiedene reguläre Graphen dritten Grades: G_1 und G_2. Es seien x_1' und x_1'' die in G_1, x_2' und x_2'' die in G_2 enthaltenen Verschmelzenden. Nehmen wir G_1 für nicht einfach an. Dann gilt folgender

Hilfssatz. *G_1 hat keinen solchen Kreis, der beide Verschmelzenden enthält.*

Da G_1 nicht einfach ist, sind zwei Fälle möglich: I. G_1 ist nicht zusammenhängend, II. es gibt eine Brücke in G_1.

Im Falle I besteht G_1 wenigstens aus zwei, miteinander nicht zusammenhängenden, abgesonderten Teilgraphen. G_1 hat aber keinen solchen, abgesonderten Teilgraphen, der keine der beiden Verschmelzenden enthält. Gäbe es nämlich einen solchen Teilgraphen in G_1, so würde sich dieser Teilgraph, wenn wir G durch Verschmelzung von x wiederherstellen würden, nicht ändern und auch in G ein abgesonderter Teilgraph bleiben, was unmöglich ist, da G zusammenhängend ist. G_1 besteht also gerade aus zwei, miteinander nicht zusammenhängenden Teilgraphen, die je eine Verschmelzende enthalten. Die beiden Teilgraphen sind miteinander in G_1 durch keinen Weg verbunden, dasselbe gilt also auch für die beiden Verschmelzenden. Hätte aber G_1 einen Kreis, der beide Verschmelzenden enthält, so gäbe es in G_1 einen Weg, der beide Verschmelzenden miteinander verbindet, was unmöglich ist. G_1 hat also im Falle I keinen solchen Kreis.

Im Falle II enthält G_1 wenigstens zwei Blätter.[7]) G_1 hat aber kein solches Blatt, das keine der beiden Verschmelzenden enthält. Gäbe es nämlich ein solches Blatt in G_1, so würde sich, wenn wir G durch Verschmelzung von x wiederherstellen würden, dieses Blatt nicht ändern und auch in G ein Blatt bleiben, was unmöglich ist, weil G kein Blatt enthält. G_1 hat also gerade zwei Blätter, die je eine Verschmelzende enthalten. Die beiden Blätter sind miteinander in G_1 nur durch einen solchen Weg verbunden, der eine Brücke enthält, dasselbe gilt also auch für die beiden Verschmelzenden. Hätte aber G_1 einen solchen Kreis, der beide Verschmelzenden enthält, so wären die beiden Verschmelzenden miteinander in G_1 durch einen solchen Weg verbunden, der keine Brücke enthält, was unmöglich ist. G_1 hat also auch im Falle II

7) Errera, a. a. O., S. 13.

keinen solchen Kreis, so daß der Hilfssatz in beiden Fällen richtig ist.

Wird G_2, statt G_1, für nicht einfach angenommen, so gilt der Hilfssatz offenbar auch für denselben.

Wir haben festgestellt, daß, wenn es in G_1 eine Brücke gibt, die beiden Verschmelzenden in zwei verschiedenen Blättern liegen. Da ein Blatt keine Brücke enthält, kann keine der beiden Verschmelzenden ein Teil einer Brücke sein. Wenn also die x_1', bzw. x_1'' enthaltende Kante eine gewöhnliche Kante ist, dann ist sie ein Teil eines, im Graphen enthaltenen Kreises. Wenn sie keine gewöhnliche Kante ist, dann kann sie nur entweder eine Schlinge, oder ein Reif sein, so daß x_1', bzw. x_1'' in jedem Falle in einem Kreise enthalten ist. G_1 hat also einen Kreis K_1', der x_1' und einen Kreis K_1'', der x_1'' enthält. Aber x_1' und x_1'' liegen im Falle I in zwei, miteinander nicht zusammenhängenden Teilgraphen, im Falle II in zwei verschiedenen Blättern, die keinen gemeinsamen Teil haben, darum haben auch K_1' und K_1'' keinen gemeinsamen Teil (Fig. 5).

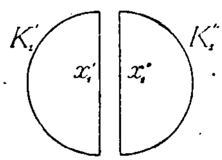

Fig. 5.

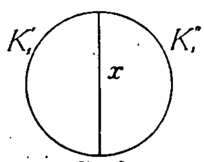

Fig. 6.

Stellen wir x durch Verschmelzung wieder her. Hiedurch haben wir je ein stetiges Linienstück von K_1' und K_1'' miteinander verschmolzen und x ist zu einem gemeinsamen Teile der beiden Kreise geworden (Fig. 6).

Zerspalten wir nun x auf die andere Weise: es entsteht G_2. x spaltet sich in die Verschmelzenden x_2' und x_2'' und die Kreise K_1' und K_1'' vereinigen sich zum Kreise K_2, der beide Verschmelzenden enthält (Fig. 7).

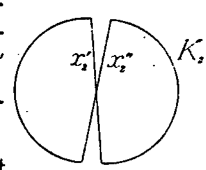

Fig. 7.

Wäre G_2 nicht einfach, dann hätte er laut des Hilfssatzes keinen solchen Kreis, der beide Verschmelzenden enthält. Da aber K_2 beide Verschmelzenden enthält, so ist G_2 einfach, was zu beweisen war.

B e m e r k u n g. Läßt sich ein regulärer Graph dritten Grades in einen Graphen ersten und in einen Graphen zweiten Grades zerlegen und färben wir die Kanten des Graphen ersten Grades rot und die des Graphen zweiten Grades blau, so laufen in jedem Knotenpunkte des Graphen dritten Grades eine rote und zwei blaue Kanten zusammen. Unter einer Färbung des Graphen werden wir im folgenden stets eine auf diese Weise durchgeführte Färbung der Kanten verstehen.

Satz II. *Jeder einfache Graph läßt sich so färben, daß zwei beliebige Kanten desselben blau seien.*

Nehmen wir an, der Satz wäre falsch. Es sei G ein Graph niedrigster Ordnung, für den der Satz nicht gilt und x und y zwei beliebige Kanten desselben. Für einen Graphen zweiter Ordnung ist der Satz offenbar giltig, daher ist G von höherer als zweiter Ordnung.

Zerspalten wir die von einem Knotenpunkte von x ausgehende Kante z dem Satze I gemäß. Dann setzt sich x wenigstens in einer der beiden Verschmelzenden von z fort und wird ein Teil einer Kante x_1. Hinsichtlich der Kante y sind drei Fälle möglich: I. sie hat keinen gemeinsamen Knotenpunkt mit z, bleibt also unverändert, II. sie hat wenigstens einen gemeinsamen Knotenpunkt mit z, dann wird sie ein Teil einer Kante y_1, oder III. sie wird ein Teil der Kante x_1.

Für den, nach der Zerspaltung entstehenden neuen Graphen ist der Satz II schon giltig. Färben wir daher diesen Graphen so, daß zwei seiner Kanten: x_1 und — den eben erwähnten drei Fällen entsprechend — I. y, II. y_1, III. eine beliebige Kante blau seien.

Stellen wir z durch Verschmelzung wieder her. Es ist wenigstens eine ihrer beiden Verschmelzenden in x_1 enthalten, also blau. Ist die andere auch blau, so färben wir z rot, ist sie rot, so färben wir z blau. Die übrigen Kanten sollen ihre Farben behalten. Hiedurch haben wir G gefärbt, so daß x und y blau geworden sind, im Gegensatz zur Annahme.

Satz III. *Jeder reguläre Graph dritten Grades, der weniger als drei Blätter enthält, läßt sich färben.*

Es genügt, den Satz für zusammenhängende Graphen zu beweisen, da, wenn er für solche gilt, so gilt er offenbar auch für nicht-zusammenhängende.

Ein einfacher Graph läßt sich, wie es aus dem Satze II hervorgeht, färben. Es ist nicht möglich, daß der Graph nur ein Blatt enthalte.[8]) Enthält er zwei Blätter, so verbinden wir je einen inneren

---

8) Errera, a. a. O., S. 13.

Punkt derselben durch eine neue Kante: es entsteht ein einfacher Graph.[9]) Färben wir diesen Graphen so, daß zwei, von der neuen verschiedene Kanten desselben, die in einem Knotenpunkte der neuen Kante zusammenlaufen, blau seien. Dann wird die neue Kante rot sein. Lassen wir die neue Kante weg, so bekommen wir eine Färbung des ursprünglichen Graphen.

Hiedurch haben wir den folgenden Satz Petersens bewiesen:

Ein regulärer, primitiver Graph dritten Grades enthält wenigstens drei Blätter.

Zum Schluß spreche ich Herrn Professor DÉNES KÖNIG meinen aufrichtigen Dank aus, für seine gefälligen Ratschläge während der Abfassung dieser Arbeit.

(Eingegangen am 24. Mai 1934.)

9) ERRERA, a. a. O., S. 14.