Bibliographie.

R. L. Moore, Foundations of Point Set Theory (American Math. Society Colloquium Publications, volume XIII), VII + 486 pages, New York, American Mathematical Society, 1932.

The treatment is based on a set of axioms; the undefined notions are point and region; other special notions are defined in terms of these. Seven chapters are devoted to the problem of determining all possible consequences of different groups of the axioms. Some of the axioms have a familiar shape: Axiom 0. Every region is a point set. —. The following Axiom 1 looks somewhat more complicated: There exists a sequence G_1, G_2, $G_3, \ldots$ such that (1) for each n, G_n is a collection of regions covering S, (2) for each n, G_{n+1} is a subcollection of G_n, (3) if R is any region whatsoever, X is a point of R and Y is a point of R either identical with X or not, then there exists a natural number m such that if g is any region belonging to the collection G_m and containing X then $\bar{g}$ is a subset of $(R-Y) + X$, (4) if M_1, M_2, $M_3, \ldots$ is a sequence of closed point sets such that, for each n, M_n contains M_{n+1} and, for each n, there exists a region g_n of the collection G_n such that M_n is a subset of $\bar{g}_n$, then there is at least one point common to all the point sets of the sequence M_1, M_2, $M_3, \ldots$ — Axiom 2. If P is a point of a region R there exists a non-degenerate connected domain containing P and lying wholly in R. — Axiom 3. If O ist a point, $S-O$ is connected. — Axiom 4. If J is a simple closed curve, $S-J$ is the sum of two mutually separated connected point sets such that J is the boundary of each of them. (There shall not be any trouble of proving the Jordan theorem; it has became an axiom!) — Axiom 5. If A is a point of a region R and B is a point distinct from A there exists, in R, a simple closed curve separating A from B (cf. also Axioms 5_1 und 5_2 on p. 412). — Axiom 6. No compact continuum separates two non-compact point sets from each other. — Axiom 7. The set of all points is completely separable. — Axiom 8. Space is not compact. (Axiom 8′. Space is compact.)

As a matter of fact, any axiomatic treatment (moreover any mathematical theory) is dealing with problems of the kind whether a certain proposition can or cannot be deduced from certain assumptions. One is accustomed to take the assumptions very simple and the conclusions as complicated as ever possible; but the opposite point of view is also justified. This is a matter of taste just as well what we call simple or complicated. One who has worked for years with this system of axioms will find the above axiom 1 surely more simple than for instance this: two points determine a straight line.

Many propositions of the ordinary analysis situs of plane or space are involved in the treatment; they are — together with their proof — deformed in order to fit into the axiomatic treatment.

Certain groups of the axioms have not been fully investigated in view of their possible consequences. This circumstance certainly will give rise for future researches.

B. de K.

Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, mit erläuternden Anmerkungen sowie Ergänzungen aus dem Briefwechsel CANTOR—DEDEKIND herausgegeben von ERNST ZERMELO, nebst einem Lebenslauf Cantors von ADOLF FRAENKEL, VII + 486 S., Berlin, J. Springer, 1932.

Kaum hat ein einziger Forscher die Mathematik um so vielen Ideen und Methoden bereichert, wie CANTOR. Daß sein riesiges Werk, die Mengenlehre, durch die Antinomien erschüttert und ihre Neubegründung auch noch heute nicht zu vollem Abschluß geführt wurde, vermindert keinesfalls seinen Verdienst. Im Gegenteil, dieser Umstand hat genauere Untersuchungen der Grundlagen der Mathematik angeregt, Untersuchungen, die sowieso einmal durchgeführt werden mußten. Man begrüßt daher mit Freude die Erscheinung von Cantors gesammelten Werken.

Die Arbeiten sind nach ihren Stoffgebieten in vier Abschnitte eingeteilt: I. Zahlentheorie und Algebra, II. Funktionentheorie, III. Mengenlehre und IV. Philosophie und Geschichte der Mathematik. Innerhalb der einzelnen Abschnitte sind die Arbeiten zeitlich geordnet. Die ganze Anordnung entspricht so ungefähr der chronologischen Entwicklung, da CANTOR seine Untersuchungen mit der Zahlentheorie begonnen, dann mit der reellen Funktionentheorie fortgesetzt, wobei er im Aufbau der reellen Zahlen und in der Theorie der trigonometrischen Reihen Klassisches geschaffen hat; von hier aus wurde er zu mengentheoretischen Problemen geführt, die ihn zum Errichten seines Hauptwerkes bewegt haben; endlich sind seine philosophische Untersuchungen dadurch entstanden, daß er in der Mengenlehre neue Gesichtspunkte beim Problem des Unendlichen gefunden hat.

Den einzelnen Arbeiten folgen erläuternde und kritische Anmerkungen von ZERMELO, aus denen auch der Zusammenhang mit anderen Arbeiten klar hervortritt. Als Anhang folgen einige Stücke aus dem Briefwechsel zwischen CANTOR und DEDEKIND; man erkennt aus diesen den klaren Blick Cantors in der Frage der Antinomien und auch, wie er das Problem der Wohlordnung zu lösen versucht hat; auch findet man hier einen bisher nicht veröffentlichten Beweis Dedekinds für den Äquivalenzsatz.

Der Band enthält auch eine Schilderung des Lebens und der Persönlichkeit Cantors aus der Feder Fraenkels. Man liest diese in fesselndem Stil geschriebene Zeilen mit großem Interesse besonders heute, wo ebenfalls oft neue Schöpfungen immer wieder um ihre Anerkennung und „Bürgerrecht" in der Wissenschaft kämpfen müssen.

L. Kalmár.

Erich Kamke, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, IX + 182 S., Leipzig, S. Hirzel, 1932.

Dies treffliche Büchlein kann nur nach einem geschichtlichen Rückblick voll gewürdigt werden.

Nach den grundlegenden Untersuchungen von R. V. MISES stand fest, daß die Wahrscheinlichkeit nur als *Häufigkeitsgrenzwert* innerhalb einer merkmalbehafteten *unendlichen* Ereignisfolge streng definiert werden kann. War auch damit die auf „endlich viele gleichwahrscheinliche" Fälle sich stützende — zirkelhafte und enge — klassische Definition endgültig beseitigt, so sah sich v. MISES zur Ableitung der Multiplikationssätze immer noch genötigt, die Erhaltung der Häufigkeitsgrenzwerte bei „jeder reinen Stellenauswahl" innerhalb der ursprünglichen Folge zu fordern. Dieses Axiom der Regellosigkeit schloß die mathematischen Folgen a limine aus und war nicht haltbar.

Ablehnend mußte man sich auch gegenüber einem weniger exklusiven Axiomensystem von K. DÖRGE verhalten — in Ermangelung eines Widerspruchslosigkeitsbeweises. So zeigte v. Mises's 1931 erschienenes Lehrbuch fast das alte, vom Verfasser in 1919 entworfene Bild der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Tatsächlich hat sich aber inzwischen die Lage wesentlich geändert. Erstens hat A. COPELAND in einer erst von KAMKE beachteten Arbeit (*American Journal of Math.*, **50**, 1928) die Existenz einer scharf definierten Klasse von Wahrscheinlichkeitsfolgen bewiesen und innerhalb solchen die Newtonsche Formel streng abgeleitet. Zweitens stellte E. TORNIER (*Journal für Math.*, **160**, **163**, 1929—30) eine groß angelegte axiomatische Untersuchung über unendliche Systeme von Wahrscheinlichkeitsfolgen an.

E. Kamkes Verdienst war eine lehrbuchmäßige Darstellung der so erworbenen Grundlagen und eine derentsprechende Gestaltung der ganzen Theorie zu geben. Sein Buch bringt *als erstes* eine strenge Theorie des Bernoullischen Problemkreises bei endlichen *und* unendlichen arithmetischen Verteilungen: mit den Grundgesetzen beginnend den Satz von BERNOULLI, die Newtonsche Formel und deren asymptotisches Verhalten, das Gesetz der großen Zahlen in der Tschebyscheffschen Fassung und den Fundamentalsatz.

Mannigfache Beispiele behandeln im Lichte der neuen Theorie kritisch und klar klassische Glücksspielaufgaben, Zermelosche Spielerstärkenskale, Mendelsches Vererbungsgesetz, Iteration und Lexissche Dispersionstheorie. Das Petersburger und das Tschebyscheffsche Problem finden erst in diesem Buche endgültige Klärung. Die 17 Aufgaben sind — mit Ausnahme des Göttinger Krawattenproblems — auch geschickt gewählt. Die Darstellung ist allerdings abstrakt und bündig, erfordert somit ein nicht geringes Maß an mathematischer Intelligenz. Längere Beispiele und die hiezu nötigen feineren Betrachtungen unterbrechen manchmal den Gang der Entwicklung.

Wir wünschen dem Buche die wohlverdiente wärmste Aufnahme.

T. v. Stachó.

Harald Bohr, Fastperiodische Funktionen (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, erster Band, Heft 5), IV + 96 S., Berlin, J. Springer, 1932.

The book originates from lectures delivered by its author from 1930—31 at American universities. The difficult choice between an encyclopedic exposition of the whole domain without detailed proofs and a detailed exposition of a part of the theory has been decided in favour of the second alternative. Accordingly the volume contains only the theory of continuous almost periodic functions of a single variable. Two appendices, one dealing with the various generalisations, the other with analytical almost periodic functions, give an impression of other parts of the theory.

In the brief interval of only 10 years since the appearance of the first of Bohr's fundamental papers in *Acta mathematica* the theory of almost periodic functions has, through the work of many authors, undergone a rapid development. In particular the proofs of the main theorems of BOHR have been simplified very much and entirely new proofs have been found.

The present exposition has profited much from these simplifications. It begins with an exposition of the essential features af the theory of FOURIER series for continuous functions with period 2π, culminating in the proof (by means of Fejér's summation) of the WEIERSTRASS approximation theorem according to which these and only these functions can be uniformly approximated by finite trigonometrical sums $\Sigma a_n e^{inx}$.

Then follows the theory of almost periodic functions. There is no need to repeat here the definition of an almost periodic function; it will be sufficient to say, that its success lies precisely in the fact that these and only these functions can be uniformly approximated by finite trigonometrical sums $\Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ where now the λ_n are arbitrary real numbers. The proof of this result follows essentially the lines of the proof of the WEIERSTRASS theorem; it depends on a theory of FOURIER series for almost periodic functions. In the proof of the uniqueness theorem for these series (equivalent to the fundamental theorem in Bohr's original exposition) we meet the essential difficulty of the theory which has no analogue in the theory of periodic functions. The proof given is the elegant one due to DE LA VALLÉE-POUSSIN. The proof of the approximation theorem follows then by Bochner's generalisation of the FEJÉR summation.

As an example, the author considers the theorem that a FOURIER series whose exponents are linearly independent is always absolutely convergent and represents the function. The proof given is due to FEKETE and had not been published before.

The exposition is kept quite elementary and the book should be excellent for seminar purposes.

B. Jessen.

Ludwig Bieberbach, Einleitung in die höhere Geometrie (Teubners math. Leitfäden, Band 39), VIII + 128 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Der Band gibt im Anschluß an die beiden „Leitfäden" der analytischen und projektiven Geometrie einige Betrachtungen von verschiedenen Gebieten der höheren Geometrie.

Ein verhältnismäßig umfangreiches erstes Kapitel wird dem axiomatischen Aufbau der projektiven Geometrie gewidmet. Das vom Verfasser betonte Prinzip: „ein Axiomensystem der projektiven Geometrie soll sich selbst dual sein", muß als in vollem Maße motiviert angesehen werden; das in diesem Buch angenommene Axiomensystem, welches übrigens sehr einfach ist, genügt dieser Forderung. Der Aufbau der projektiven Geometrie geschieht auf die übliche Weise, mit Einführung der Punktrechnung. Die geläufigen Fragen der Axiomatisierung: Widerspruchslosigkeit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit werden erörtert. Zum Schluß wird der Ausbau der gewöhnlichen projektiven Geometrie mit den Hinweis auf einen wichtigen Satz von PONTRJAGIN erledigt; leider sind die von BIEBERBACH zu diesem Zweck für bekannte Begriffe angegebenen Definitionen zum Teil unzutreffend (Zusammenhang, vollständiges Häufungselement).

Im zweiten Kapitel wird das Hessesche Übertragungsprinzip auf verschiedene Probleme angewendet; es wird auch auf seine Beziehung zur Nomographie hingewiesen. — Das dritte Kapitel enthält eine Betrachtung der Liniengeometrie; im vierten und fünften werden die Kreisgeometrien von MÖBIUS, LIE und LAGUERRE dargestellt. Das sechste Kapitel behandelt die projektive Maßbestimmung und im Anschluß daran die nichteuklidische Geometrien. „Diese Kapitel sind sämtlich von der Idee einer Isomorphie verschiedener geometrischer Gebiete beherrscht" (nach dem Vorwort). Diese Isomorphien beruhen teils auf bekannten Übertragungsprinzipien, teils auf zufälligen. Ein wichtiges Übertragungsprinzip: die Beziehung einer Geometrie zur Geometrie ihrer Gruppe, was in Cartan's Werken eine vornehme Rolle spielt und wunderbare Perspektiven eröffnet, ist hier ganz außer Acht geblieben. Überhaupt ist der gruppentheoretische Standpunkt etwas in den Hintergrund geraten.

Das, was das Buch gibt, wird dem Leserkreis, für den es bestimmt ist, eine interessante und nützliche Lektüre bieten.

B. v. K.

W. Breidenbach, Die Dreiteilung des Winkels (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, Bd. 78), IV + 38 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Die Dreiteilung eines Winkels wird hier elementar behandelt. Die Unmöglichkeit der Dreiteilung des Winkels 120^0 mittels Zirkels und Lineals wird aus dem — vom Verfasser *nicht bewiesenen* — Satze gefolgert: Hat eine Gleichung dritten Grades mit rationalen Koeffizienten eine konstruierbare Wurzel, so hat sie auch mindestens eine rationale Wurzel. Es werden verschiedene Methoden für die Lösung der Aufgabe besprochen: *a)* Einschiebung; *b)* Lösung mittels spezieller Kurven: Konchoiden, Trisektrix, gleichseitige Hyperbel, Parabel, kubische Parabel; *c)* Lösung mittels Dreiteilungsinstrumenten; *d)* Näherungsmethoden.

Sz. Nagy.