Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich.

Von B. VON KERÉKJÁRTÓ in Szeged.

Sei F eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht $p > 1$. Unter einer *regulären Abbildung* von F auf sich verstehen wir eine solche topologische Abbildung von F auf sich, die in jedem Punkt von F regulär ist[1]).

Bezeichnen wir mit $\bar{F}$ die universelle Überlagerungsfläche von F. Auf das Innere Φ des Einheitskreises, das wir mit einer hyperbolischen Metrik versehen als das konforme Abbild der hyperbolischen Ebene darstellen, bilden wir $\bar{F}$ topologisch derart ab, daß der Gruppe der Decktransformationen[2]) von $\bar{F}$ eine Gruppe Γ von Bewegungen der hyperbolischen Ebene Φ entspricht. Zwei Punkte von Φ nennen wir *äquivalent*, wenn sie durch Bewegungen aus Γ ineinander übergeführt werden. Jedem Punkt P von F entspricht in Φ ein System hinsichtlich Γ äquivalenter Punkte $(\bar{P})$; wir nennen P den *Spurpunkt* der Punkte $\bar{P}$, und bezeichnen die Punkte $\bar{P}$ als über dem Punkt P liegende Punkte von Φ. Unter

[1]) Wegen der Definition der Regularität einer Abbildung, und anderer Anwendungen dieses Begriffes, s. die folgenden Arbeiten des Verfassers: Sur le caractère topologique des représentations conformes, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris,* **198** (1934), pp. 317—320; Sur la régularité des transformations d'un groupe continu simplement transitif, *ebenda,* pp. 1114—1116; Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene, *diese Acta,* **6** (1934), S. 226—234; Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen, *ebenda,* S. 235—262; Ergänzung dazu, *ebenda,* **7** (1934) S. 58; Sur le groupe des transformations topologiques du plan, *Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa,* (2) **3** (1934), pp. 393—400.

[2]) vgl. H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig und Berlin, 1913), S. 50; B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie* (Berlin, 1923), S. 162, 177.

dem Abstand von zwei Punkten P und Q der Fläche F verstehen wir den hyperbolischen Abstand der Punktsysteme $(\bar{P})$ und $(\bar{Q})$.

Eine topologische Abbildung T von F auf sich *induziert* topologische Abbildungen τ von Φ auf sich von der folgenden Eigenschaft: irgendein Punkt $\bar{P}$ von Φ, dessen Spur P ist, geht bei τ in einen solchen Punkt $\bar{P}' = \tau(\bar{P})$ über, dessen Spur das bei T entstehende Bild $P' = T(P)$ des Punktes P ist. Wenn wir einem Punkt $\bar{P}_0$ des Systems $(\bar{P})$ einen beliebigen Punkt $\bar{P}_0'$ des Systems $(\bar{P}')$ zuordnen, wird dadurch eine durch T induzierte Abbildung τ von Φ auf sich eindeutig bestimmt. Alle anderen durch T induzierten Abbildungen τ' entstehen aus dieser durch rechtsseitige und auch durch linksseitige Multiplikation mit den Elementen von Γ. Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Die durch eine reguläre Abbildung der Fläche F induzierten Abbildungen τ sind regulär in der hyperbolischen Ebene Φ.*

Bezeichnen wir mit 2ε eine positive Zahl, die kleiner ist als der Abstand von je zwei bei Γ äquivalenten Punkten von Φ. Der Zahl ε entspricht laut der Regularität von T eine Zahl $\delta > 0$ von der folgenden Art: zwei beliebige Punkte P und Q von F, deren Abstand kleiner als δ ist, gehen bei jeder Potenz T^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$ von T in zwei von einander um weniger als ε entfernte Punkte $T^n(P)$ und $T^n(Q)$ über. Seien $\bar{P}$ und $\bar{Q}$ zwei beliebige Punkte von Φ, deren Abstand kleiner als δ ist; ihre Spurpunkte P und Q haben ebenfalls einen Abstand $< \delta$; für jedes n ist also der Abstand von $T^n(P)$ und $T^n(Q)$ kleiner als ε. Sei τ eine durch T induzierte Abbildung von Φ auf sich. Wäre für eine bestimmte Zahl n der Abstand der Punkte $\tau^n(\bar{P})$ und $\tau^n(\bar{Q})$ größer als ε, so gäbe es einen mit $\tau^n(\bar{Q})$ äquivalenten Punkt $\tau^n(\bar{\bar{Q}})$, dessen Abstand von $\tau^n(\bar{P})$ kleiner als ε ist, da nämlich der Abstand des Punktes $\tau^n(\bar{P})$ vom System der mit $\tau^n(\bar{Q})$ äquivalenten Punkte kleiner als ε ist. Lassen wir einen veränderlichen Punkt $\bar{R}$ die Strecke $\bar{Q}\bar{P}$ stetig umlaufen; der Bildpunkt $\tau^n(\bar{R})$ umläuft einen stetigen Bogen von $\tau^n(\bar{Q})$ bis $\tau^n(\bar{P})$. Für jeden Punkt $\bar{R}$ der Strecke $\bar{P}\bar{Q}$ ist entweder der Abstand der Punkte $\tau^n(\bar{R})$ und $\tau^n(\bar{P})$ kleiner als ε, oder es gibt einen mit $\tau^n(\bar{R})$ äquivalenten Punkt $\tau^n(\bar{\bar{R}})$, dessen Abstand von $\tau^n(\bar{P})$ kleiner als ε ist. Es gibt also mindestens einen Punkt $\overline{R}$ auf der Strecke $\overline{Q}\overline{P}$, für welchen $\tau^n(\overline{R})$ und ein mit ihm äquivalenter Punkt $\tau^n(\overline{\overline{R}})$ beide um nicht mehr als ε von $\tau^n(\overline{P})$ entfernt sind. Das widerspricht der Annahme, daß je zwei äquivalente Punkte von Φ um mehr als 2ε von einander entfernt sind.

Der analoge Satz gilt auch für den Fall $p=1$; in diesem Falle bilden wir die universelle Überlagerungsfläche auf die euklidische Ebene ab, so daß der Gruppe der Decktransformationen eine von zwei Translationen erzeugte diskontinuierliche Gruppe entspricht.

Satz 2. *Wenn eine reguläre Abbildung T einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$ auf sich einen Fixpunkt besitzt, so ist sie periodisch.*

Wir dürfen annehmen, daß die Abbildung T die Indikatrix erhält; im entgegengesetzten Fall würden wir die Abbildung T^2 betrachten. Sei P ein Fixpunkt der Abbildung T, sei $(\overline{P})$ das System der über P liegenden Punkte von Φ, und $\overline{P}_0$ ein beliebiger Punkt des Systems $(\overline{P})$. Wir betrachten diejenige durch T induzierte Abbildung τ von Φ, die $\overline{P}_0$ invariant läßt. Bilden wir das Innere des Einheitskreises topologisch auf eine einmal punktierte Kugelfläche ab, so entspricht der Abbildung τ eine indikatrixerhaltende topologische Abbildung der geschlossenen Kugelfläche auf sich, mit höchstens einem singulären Punkt, und mit einem (dem Punkte $\overline{P}_0$ entsprechenden) regulären Fixpunkt. Diese Abbildung der Kugel ist einer Drehung homöomorph, laut meines Satzes über die topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen[3]). Auch die Abbildung τ ist also einer Drehung des Kreisinnern um einen Winkel $2\pi\alpha$ homöomorph. Wäre α irrational, so würden die bei den Potenzen von τ entstehenden Bilder eines mit $\overline{P}_0$ äquivalenten Punktes $\overline{P}$ eine in sich dichte Menge bilden; da aber diese Bildpunkte $\tau^n(\overline{P})$ zufolge der Invarianz von $\overline{P}_0$ sämtlich mit $\overline{P}_0$ äquivalent sind, bilden sie eine isolierte Punktmenge. Daraus folgt, daß α rational, und also τ periodisch ist.

Für $p=1$ ist τ eine reguläre Abbildung der euklidischen Ebene auf sich mit einem Fixpunkt, also einer Drehung homöomorph, deren Periodizität mittels der obigen Methode bewiesen wird.

[3]) siehe die unter [1]) zitierte Arbeit des Verfassers: Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen, insbesondere S. 250—252.

Unter einer *zur Klasse der Identität gehörigen* topologischen Abbildung der Fläche F auf sich verstehen wir eine solche, die durch eine stetige Deformation auf der Fläche in die Identität übergeführt werden kann. Über solche Abbildungen gilt der folgende

Fixpunktsatz von BIRKHOFF[4]: *Eine zur Klasse der Identität gehörige topologische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich selbst besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Eine zur Klasse der Identität gehörige topologische Abbildung transformiert jede gerichtete einfache geschlossene Kurve von F, insbesondere also auch jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnittsystems von F in eine homotope[5] Kurve. Die Umkehrung davon bildet den Inhalt des folgenden, von R. BAER bewiesenen Satzes[6]: *Eine topologische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich selbst, die jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnittsystems homotop transformiert, gehört zur Klasse der Identität.* Auf Grund dieses Satzes folgt aus dem Birkhoffschen Fixpunktsatz, daß eine topologische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich, die jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnittsystems homotop transformiert, wenigstens einen Fixpunkt besitzt. Aus der *Fixpunktformel von* ALEXANDER ergibt sich sogar direkt, daß die Summe der Indizes der Fixpunkte gleich $2-2p$ ist[7].

Nach dem Satz 2 folgt daraus, daß eine reguläre Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich, die jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnitt-

---

[4] G. D. BIRKHOFF, Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom, *Transactions American Math. Society,* **18** (1917), pp. 199—300, insbesondere p. 291.

[5] Zwei gerichtete einfache geschlossene Kurven heißen *homotop* auf F, wenn sie auf F stetig ineinander deformiert werden können; vgl. B. VON KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie,* S. 124.

[6] R. BAER, Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen, *Journal für die reine und angewandte Math.,* **159** (1928), S. 101—116, siehe insbesondere Satz 3 auf S. 115.

[7] J. W. ALEXANDER, Invariant Points of a Surface Transformation of Given Class, *Transactions American Math. Society,* **25** (1923), pp. 173—184. Siehe ferner J. NIELSEN, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, *Acta Math.,* **50** (1927), S. 189—358; siehe insbesondere §§ 42—43 auf S. 310—322.

systems homotop transformiert, periodisch ist. Dieses Resultat würde für die weitere Betrachtung genügen; es ergibt sich aber gleich die folgende, auch für sich interessante Verschärfung davon:

Satz 3. *Eine reguläre Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich selbst, die jeden Rückkehrschnitt eines kanonischen Schnittsystems homotop transformiert, kann nur die Identität sein.*

Die analoge Behauptung betreffend *konforme* Abbildungen bildet den Inhalt eines bekannten Satzes von HURWITZ[8]); über *periodische* Abbildungen wurde der analoge Satz von BROUWER bewiesen[9]).

Der Satz 3 ist auf Grund unserer vorigen Ergebnisse eine unmittelbare Folgerung aus der folgenden Behauptung: *Eine von der Identität verschiedene, indikatrixerhaltende periodische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$ auf sich, die mindestens einen Fixpunkt besitzt, transformiert keinen Rückkehrschnitt homotop.* — Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung der durch die Abbildung auf der hyperbolischen (bzw. auf der euklidischen) Ebene induzierten Abbildungen. Sei P ein Fixpunkt von F, sei $\overline{P}$ ein über P liegender Punkt der hyperbolischen Ebene Φ; wir betrachten diejenige durch T induzierte Abbildung τ von Φ, die $\overline{P}$ invariant läßt. Da T periodisch, also regulär ist, so folgt aus dem Satz 1 die Regularität, und wegen der Existenz eines Fixpunktes $\overline{P}$ die Periodizität von τ. Wäre irgend ein durch P gehender Rückkehrschnitt c von F durch T homotop transformiert, so wäre der Endpunkt desjenigen über c liegenden Bogens $\overline{c}$, dessen Anfangspunkt in $\overline{P}$ liegt, ein von $\overline{P}$ verschiedener Fixpunkt der Abbildung τ. Da τ in Φ mehr als einen Fixpunkt besitzt, so ist τ,

---

8) A. HURWITZ, Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, *Math. Annalen*, **41** (1893), S. 403—442, insbesondere S. 428.

9) L. E. J. BROUWER, Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises der Existenztheoreme eindeutig umkehrbarer polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen*, 1912, S. 603—606, s. insbesondere Fußnote 3) auf S. 605; L. E. J. BROUWER, Über eineindeutige stetige Transformationen von Flächen in sich (6. Mitteilung), *Proceedings Royal Academy Amsterdam*, **21** (1918), S. 707—710.

und also auch T die Identität. — Somit ist die obige Behauptung, und auch der Satz 3 bewiesen.

Aus dem Satz 3 ergibt sich gleich der folgende Satz, welcher bei der Untersuchung der Gruppen von regulären Abbildungen eine wesentliche Rolle spielt:

Satz 4. *Eine Gruppe von regulären Abbildungen einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich kann keine „infinitesimalen" Abbildungen enthalten*[10]).

Nun beweisen wir den folgenden

Satz 5. *Eine reguläre Abbildung T einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$ besitzt eine Potenz, die zur Klasse der Identität gehört; für $p > 1$ ist also die Abbildung T periodisch.*

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ die Rückkehrschnitte eines kanonischen Schnittsystems von F. Bezeichne 2ε (wie oben) eine solche positive Zahl, die kleiner ist, als der Abstand von je zwei äquivalenten Punkten von Φ. Sind dann c und c' zwei beliebige solche Wege in Φ vom Durchmesser $< \varepsilon$, daß der Anfangs-, bzw. der Endpunkt von c' mit denjenigen von c gemeinsam ist, so ist die Spur des geschlossenen Weges $c + c'$ auf F homotop 0. Sei δ eine der Zahl ε laut der Regularität von T entsprechende positive Zahl. Zerlegen wir a_1 durch endlich viele Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_k$ in Bögen $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_kP_1$ vom Durchmesser $< \delta$. Sei τ eine durch T induzierte Abbildung von Φ auf sich. Betrachten wir einen über dem Rückkehrschnitt a_1 liegenden Bogen $\bar{a}_1$ in Φ, und das Bild $\tau^n(\bar{a}_1)$ von $\bar{a}_1$ bei der Abbildung τ^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Dem Bogen $P_\nu P_{\nu+1}$ von a_1 entspricht ein Bogen von $\bar{a}_1$ vom Durchmesser $< \delta$, welcher bei τ^n in einen Bogen vom Durchmesser $< \varepsilon$ übergeht. Das Bild $\tau^n(\bar{a}_1)$ wird also aus k Bögen vom Durchmesser $< \varepsilon$ zusammengesetzt. Betrachten wir für jedes n einen mit $\tau^n(\bar{a}_1)$ äquivalenten Bogen $\tau^n(\bar{\bar{a}}_1)$, dessen Anfangspunkt in einem beliebig aber fest gewählten Fundamentalpolygon π von Φ liegt; die Endpunkte von allen solchen Bögen liegen im Abstand $< k\varepsilon$ von π. Es gibt eine endliche Anzahl mit π äquivalenter Polygone, die sämtliche von π um weniger als $k\varepsilon$ entfernte Punkte von Φ enthalten. Es gibt also wenigstens zwei solche Exponenten

[10]) Wegen des analogen Satzes über konforme Abbildungen vgl. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, S. 159 und 163.

i und j $(i>j)$, für welche die Endpunkte der Bögen $\tau^i(\overline{\overline{a}}_1)$ und $\tau^j(\overline{\overline{a}}_1)$ im selben mit π äquivalenten Polygon π', während ihre Anfangspunkte im Polygon π selbst liegen. Die Spuren der Bögen $\tau^i(\overline{\overline{a}}_1)$ und $\tau^j(\overline{\overline{a}}_1)$, das sind die Kurven $T^i(a_1)$ und $T^j(a_1)$, sind also homotop auf F. Diese gehen bei T^{-j} in die Kurven $T^{i-j}(a_1)$ und a_1 über, die also ebenfalls homotop auf F sind. Setzen wir $i-j=m_1$; seien $m_1, \ldots, m_p$, $n_1, \ldots, n_p$ solche positive ganze Zahlen, daß $T^{m_\nu}(a_\nu)$ und a_ν homotop sind, ebenso $T^{n_\nu}(b_\nu)$ und b_ν $(\nu=1, 2, \ldots, p)$. Bezeichnen wir mit N eine gemeinsame Vielfache der Zahlen $m_1, \ldots, m_p$, $n_1, \ldots, n_p$. Bei T^N geht jeder Rückkehrschnitt a_ν und b_ν in eine ihm homotope einfache geschlossene Kurve über. T^N ist also eine zur Klasse der Identität gehörige reguläre Abbildung der Fläche auf sich, die für den Fall $p>1$ nach Satz 3 nur die Identität sein kann. Somit ist Satz 5 bewiesen.

Der analoge Satz für berandete Flächen läßt sich auf die folgende Weise herleiten. Sei F_1 eine von r einfachen geschlossenen Kurven berandete orientierbare Fläche vom Geschlecht p. Sei T_1 eine reguläre Abbildung von F_1 auf sich, d. h. eine topologische Abbildung von F_1 auf sich, die in jedem Punkte von F_1 (die Randpunkte mitberechnet) regulär ist. — Wir bilden F_1 stetig auf eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht p derart ab, daß die Randkurven von F_1 in die Punkte $R_1, R_2, \ldots, R_r$ von F übergehen, und die Abbildung außer dieser Punkte umkehrbar eindeutig sei. Dadurch entspricht der Abbildung T_1 von F_1 auf sich eine topologische Abbildung T von F auf sich, die in jedem Punkt von F regulär ist. — Bei T_1 gehen die Randkurven von F_1 ineinander über; es gibt also eine Potenz T_1^n von T_1, die jede der Randkurven auf sich selbst abbildet. Die Abbildung T^n hat also wenigstens r Fixpunkte auf F, nämlich die Punkte $R_1, \ldots, R_r$. Ist $p=0$ und $r>2$, so ist T^n (oder T^{2n}) eine indikatrixerhaltende reguläre Abbildung der Kugel auf sich mit mehr als zwei Fixpunkten, also die Identität[11]). Wenn $p \geqq 1$ und $r \geqq 1$, so ist T^n periodisch, laut des obigen Satzes 2. — Dieses Resultat fassen wir mit dem Satz 5 zusammen, im folgenden

S a t z 6. *Eine reguläre Abbildung einer geschlossenen oder von r einfachen geschlossenen Kurven berandeten orientierbaren Fläche vom Geschlecht p auf sich selbst ist periodisch, ausgenommen*

---

[11]) siehe die unter [3]) zitierte Arbeit, S. 250 (Satz I).

die vier folgenden Fälle: $p=0$, $r=0, 1, 2$ *und* $p=1$, $r=0$; *das sind: die Kugel, die Kreisfläche, der Kreisring und der Torus.*

Eine obere Schranke für die Perioden bildet für $p>1$ die Zahl $N=10(p-1)$, laut der Hurwitzschen Formel[12]). Für $p=1$, $r\geqq 1$ ist die größere der Zahlen r und 6 die größte Periode, wie es aus der Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus erhellt[13]). Für $p=0$, $r>2$ ist $N=r$ die größte Periode, wie man leicht einsieht.

Aus dem *Involutionssatz von* BROUWER[14]) ergibt sich, daß jede periodische Abbildung einer geschlossenen oder berandeten orientierbaren Fläche auf sich einer konformen Abbildung homöomorph ist. Andererseits ist nach dem *Klein—Poincaréschen Satze* jede konforme Abbildung einer geschlossenen oder berandeten orientierbaren Fläche auf sich periodisch, abgesehen von den im Satz 6 aufgezählten vier Ausnahmefällen, denen 7 hinsichtlich konformer Abbildung verschiedene Flächentypen entsprechen[15]).

Die Regularität der konformen Abbildungen kann man folgendermaßen direkt nachweisen. Die konformen linearen Abbildungen der Kugelfläche sind regulär, bis auf höchstens zwei singuläre Punkte, wie man unmittelbar erkennt. Es folgt gleich, daß die linearen Abbildungen des Kreisinnern auf sich in der hyperbolischen Metrik ebenfalls regulär sind. Wenn man die hyperbolische Metrik der Überlagerungsfläche auf die Grundfläche überträgt, so erscheinen in dieser Metrik die konformen Abbildungen der Grundfläche auf sich, da sie lineare Abbildungen der hyperbolischen Ebene Φ auf sich induzieren, ebenfalls als regulär. Für den Fall des Torus erinnern wir an die Aufzählung der konformen Abbildungen, woraus ersichtlich ist, daß sie in derjenigen Metrik, welche

---

12) A. HURWITZ, Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen auf sich zulassen, *Math. Annalen,* **32** (1888), S. 290—308, insbesondere S. 292—294.

13) L. E. J. BROUWER, Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus, *Proceedings Royal Academy Amsterdam,* **21** (1919), S. 1352—1356, und B. v. KERÉKJÁRTÓ, A torus periodikus transformációiról (in ungarischer Sprache), *Mat. és Természettud. Értesítő (Math. Naturw. Berichte der ungarischen Akademie der Wissenschaften),* **39** (1921), S. 213—219.

14) L. E. J. BROUWER, Über topologische Involutionen, *Proceedings Royal Academy Amsterdam,* **21** (1919), S. 1143—1145; vgl auch B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie,* S. 227—229.

15) siehe H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche,* S. 163.

der euklidischen Metrik der Überlagerungsfläche entspricht, ebenfalls regulär sind. Aus der Definition der Regularität folgt ihre Unabhängigkeit von der speziellen (beschränkten) Metrik unmittelbar.

Regularität ist eine gemeinsame Eigenschaft der konformen Abbildungen der Flächen vom Geschlecht 0 und derjenigen von positivem Geschlecht (für $p=0$ kann die Abbildung 1 oder 2 singuläre Punkte haben). Regularität, so wie Konformität, schließt nicht die aperiodischen Abbildungen aus.

Wir haben erkannt, daß *die konformen Abbildungen der geschlossenen und der berandeten orientierbaren Flächen durch die Bedingung der Regularität topologisch charakterisiert werden.*

Der einzige Fall, auf welchen die obige Betrachtung nicht anwendbar ist, ist eine reguläre Abbildung des Torus, die samt Potenzen fixpunktfrei ist.

*

Sei F eine berandete orientierbare Fläche vom Geschlecht p, mit r (>0) Randkurven; wenn $p=0$, so setzen wir voraus, daß $r>2$ ist. Betrachten wir eine Gruppe G von regulären Abbildungen von F auf sich; wir werden die Endlichkeit der Gruppe G beweisen. In diesem Resultat erhalten wir die für reguläre Abbildungen bezügliche Verallgemeinerung des die konformen Abbildungen betreffenden analogen Satzes von KLEIN und POINCARÉ[16]). Aus der Definition der Konformität folgt nämlich unmittelbar, daß die konformen Abbildungen einer Fläche auf sich eine Gruppe bilden.

Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz: *Eine Gruppe g von indikatrixerhaltenden periodischen Abbildungen der Kreislinie auf sich, deren Perioden eine feste Zahl N nicht übertreffen, ist endlich (und also zyklisch).*

Seien σ_1 und τ_1 zwei beliebige Abbildungen der Gruppe g; bezeichnen wir mit n, bzw. m ihre Perioden. Seien $\sigma=\sigma_1^\nu$ und $\tau=\tau_1^\mu$ solche Potenzen von σ_1 und τ_1, die den primitiven Drehungen, d. h. den im positiven Sinne genommenen Drehungen um $\frac{2\pi}{n}$ und $\frac{2\pi}{m}$ homöomorph sind. Sei A ein beliebiger Punkt der Kreislinie, $\sigma(A)$ und $\tau(A)$ seine Bilder bei σ und τ. Wenn der

16) H. WEYL, l. c, S. 165.

Punkt $\sigma(A)$ auf dem durch die Punkte A und $\tau(A)$ bestimmten, den Punkt $\tau^2(A)$ nicht enhaltenden und von A nach $\tau(A)$ positiv gerichteten Bogen liegt, in Zeichen: $A \subset \sigma(A) \subset \tau(A)$, so besteht auch für jeden anderen Punkt B der Kreislinie die Beziehung: $B \subset \sigma(B) \subset \tau(B)$. Im entgegengesetzten Fall wäre nämlich für einen Punkt P des Bogens AB: $\sigma(P) = \tau(P)$, also hätte die zur Gruppe g gehörige Abbildung $\sigma\tau^{-1}$ in P einen Fixpunkt; da $\sigma\tau^{-1}$ periodisch ist, folgt daraus $\sigma \equiv \tau$, gegen unsere Annahme. Setzen wir $B = \sigma(A)$, so folgt $\sigma(A) \subset \sigma^2(A) \subset \sigma\tau(A)$[17]; aus $A \subset \sigma(A) \subset \tau(A)$ folgt durch Anwendung von τ : $\tau(A) \subset \sigma\tau(A) \subset \tau^2(A)$; also $A \subset \sigma^2(A) \subset \tau^2(A)$. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich für jede Zahl $k \leqq m : A \subset \sigma^k(A) \subset \tau^k(A)$; für $k = m$ folgt daraus, daß die Periode n von σ größer ist, als die Periode m von τ.

Daraus folgt unmittelbar, daß es zu jeder Zahl $n \leqq N$ höchstens eine primitive Drehung von der Periode n in der Gruppe g gibt, so daß die Gruppe g nur endlich viele primitive Drehungen enthält. Da nun jedes Element von g sich als Potenz einer primitiven Drehung von g mit einem nicht-negativen Exponenten $< N$ darstellen läßt, folgt daraus die Endlichkeit der Gruppe g.

Sei nun G eine Gruppe von indikatrixerhaltenden regulären Abbildungen der Fläche F auf sich. Seien $c_1, c_2, \ldots, c_r$ die Randkurven von F. Diejenigen Abbildungen von G, die c_1 in sich überführen, bilden eine Untergruppe G_1, welche eine Gruppe g_1 von indikatrixerhaltenden Abbildungen der Kurve c_1 auf sich erzeugt. Die Abbildungen von G_1 sind periodisch, laut des Satzes 6; ihre Perioden sind unterhalb einer festen Zahl N. Aus dem obigen Hilfssatz ergibt sich also die Endlichkeit der Gruppe g_1. Zwei Abbildungen von G_1, die dieselbe Abbildung von c_1 erzeugen, sind identisch auf der ganzen Fläche F, da eine indikatrixerhaltende reguläre Abbildung lauter isolierte Fixpunkte besitzt. Also bilden diejenigen Abbildungen von G, die c_1 in sich überführen, eine (der Gruppe g_1 einstufig isomorphe) *endliche* Untergruppe G_1 von G. Die Abbildungen von G, die c_1 in die Randkurve c_k $(k = 2, 3, \ldots, r)$ überführen, entstehen aus einer solchen Abbildung durch Multiplikation mit den Elementen von G_1, so daß ihre Anzahl ebenfalls endlich ist.

---

[17]) Mit $\sigma\tau$ bezeichnen wir die Abbildung, die entsteht, wenn wir zuerst σ und nachher τ ausführen.

Wenn die Gruppe auch indikatrixumkehrende Abbildungen enthält, so sei S eine solche und sei G die Untergruppe der indikatrixerhaltenden Abbildungen; die gesamte Gruppe ist dann $G+SG$, deren Endlichkeit aus der von G folgt. Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 7. *Eine Gruppe von regulären Abbildungen einer von $r\,(>0)$ einfachen geschlossenen Kurven berandeten orientierbaren Fläche vom Geschlecht p auf sich selbst ist endlich, ausgenommen die Fälle $p=0$, $r=1, 2$.*[18])

Laut des Involutionssatzes von BROUWER folgt daraus, daß die Gruppe einer Gruppe von konformen Abbildungen homöomorph ist.

*

Die hier nicht behandelten Fälle: 1. reguläre Abbildungen des Torus auf sich, die samt Potenzen fixpunktfrei sind, 2. Gruppen von regulären Abbildungen einer geschlossenen orientierbaren Fläche auf sich — deren Untersuchung auch andere Methoden erfordert — sollen für eine nächste Mitteilung vorbehalten werden.

(Eingegangen am 21. Juni 1934.)

---

18) Eine topologische Analyse des die konformen Abbildungen betreffenden analogen Satzes für den Fall $p=0$ wurde von T. RADÓ gegeben: Über die konformen Abbildungen schlichter Gebiete, *diese Acta*, 2 (1924), S. 47—60.