Über die regulären Abbildungen des Torus.

Von B. von Kerékjártó in Szeged.

In der vorangehenden Arbeit[1]) habe ich bewiesen, daß jede indikatrixerhaltende reguläre Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich periodisch und also einer konformen Abbildung homöomorph ist. Der Satz und sein Beweis bleiben auch für den Fall $p = 1$ gültig, wenn die Abbildung oder eine Potenz derselben einen Fixpunkt hat. Der noch übrigbleibende Fall wird durch den folgenden Satz erledigt, der in der vorliegenden Arbeit bewiesen wird:

Eine indikatrixerhaltende reguläre Abbildung der Torusfläche auf sich, die samt Potenzen fixpunktfrei ist, ist einer Verschiebung des Torus in sich homöomorph und läßt sich in geeignet gewählten Koordinaten x, y durch die folgenden Formeln ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \alpha \\ y' &= y + \beta \end{aligned}\right\} \pmod 1 \qquad \left\{\begin{aligned} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq y < 1, \end{aligned}\right.$$

wobei entweder α irrational und β rational ist, oder aber α, β und 1 rational unabhängig sind.

Durch diesen Satz wird zugleich ein Problem von Birkhoff[2]) betreffend die Charakterisierung der fixpunktfreien Abbildungen des Torus durch zwei Rotationszahlen, für den Fall von regulären Abbildungen gelöst.

Sei T eine reguläre Abbildung der Torusfläche F auf sich. Zu jeder positiven Zahl ε läßt sich eine positive Zahl δ derart angeben, daß für zwei beliebige von einander um weniger als δ

---

[1]) B. von Kerékjártó, Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich, *diese Acta*, **7** (1934), S. 65—75.

[2]) G. D. Birkhoff, Surface Transformations and Their Dynamical Applications, *Acta Math.*, **43** (1920), pp. 1—119; siehe insbesondere p. 106.

entfernte Punkte A und B, und für jede Zahl $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ der Abstand der bei T^n entstehenden Bildpunkte $A^n = T^n(A)$ und $B^n = T^n(B)$ kleiner als ε ist. (Mit T^n bezeichnen wir wie üblich die n-te Potenz von T.) Die obere Grenze der Zahlen δ, für welche die obige Regularitätsbedingung in bezug auf die Zahl ε erfüllt ist, bezeichnen wir mit $\varphi(\varepsilon)$. Zufolge Definition ist $\varphi(\varepsilon) \leqq \varepsilon$.

Wir setzen voraus, daß sämtliche Abbildungen $T^n (n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ fixpunktfrei sind. Ein beliebiger Punkt P geht bei den Potenzen T^n in lauter verschiedene Punkte P^n über; wir bezeichnen mit $\{P^n\}$ die Menge der sukzessiven Bilder $P^n (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Die Menge $\{P^n\}$ hat mindestens einen Häufungspunkt Q. Ich zeige, daß *die Ableitungen der Mengen* $\{Q^n\}$ *und* $\{P^n\}$ *identisch sind,* und *die Menge* $\{P^n\}$ *in sich dicht ist.* Da Q ein Häufungspunkt von $\{P^n\}$ ist, so ist auch jeder Punkt der Menge $\{Q^n\}$ ein Häufungspunkt von $\{P^n\}$; die Ableitung von $\{Q^n\}$ gehört also zur Ableitung von $\{P^n\}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; es gibt zwei verschiedene Exponenten n und n', für welche die Abstände (P^n, Q) und $(P^{n'}, Q)$ beide kleiner als $\varphi(\varepsilon)$ sind; wenden wir die Abbildung T^{-n} an, so ergibt sich, daß $(P, Q^{-n}) < \varepsilon$, und $(P^{n'-n}, Q^{-n}) < \varepsilon$, also auch $(P, P^{n'-n}) < 2\varepsilon$. Da ε beliebig klein ist, folgt daraus, daß P Häufungspunkt der Mengen $\{P^n\}$ und $\{Q^n\}$ ist. Daraus ergibt sich unmittelbar die obige Behauptung.

Aus diesem Resultat folgt, daß entweder für keinen Punkt P, oder aber für jeden Punkt P die Menge $\{P^n\}$ auf dem Torus überall dicht liegt. Diese beiden Fälle werden wir einzeln behandeln.

Erster Fall. *Die Menge* $\{P^n\}$ *der sukzessiven Bilder eines Punktes* P *ist nicht überall dicht auf dem Torus.* Es gibt dann mindestens einen Punkt A, der weder zur Menge $\{P^n\}$ noch zu ihrer Ableitung gehört. Sei 2ε eine positive Zahl, die kleiner ist als der Abstand des Punktes P von der Ableitung von $\{A^n\}$, und bedeute δ eine positive Zahl, die kleiner als $\varphi(\varepsilon)$ ist. Wir nehmen um P die Kreisfläche vom Radius δ; wir bezeichnen diese mit V und ihre Bilder mit V^n. Die Umgebung um A vom Radius δ kann keinen Punkt der Mengen V^n enthalten; wäre R^n ein Punkt von V^n im Abstand $< \delta$ von A, so hätten wir $(A^{-n}, R) < \varepsilon$; da ferner R zu V gehört, so ist $(R, P) < \delta < \varepsilon$, also $(A^{-n}, P) < 2\varepsilon$; das widerspricht der Wahl von ε. Die Umgebung um P^n vom Radius $\varphi(\delta)$ gehört zu V^n; wenn nämlich für einen Punkt Q: $(Q, P^n) < \varphi(\delta)$, so ist $(Q^{-n}, P) < \delta$, so daß Q^{-n} zu V und folglich Q zu V^n gehört. — Da jede der Mengen V^n je eine Kreisfläche vom festen Radius $\varphi(\delta)$ enthält, gibt es höchstens endlich viele unter den Mengen V^n paarweise ohne gemeinsamen Punkt; die Vereinigungsmenge ΣV^n besteht also aus einer *endlichen* Anzahl von Gebieten; die Ableitung von ΣV^n ist eine abgeschlossene Menge M, die also endlich viele Komponenten besitzt. Offenbar ist die Menge M invariant bei der Abbildung T.

Wir bezeichnen mit g dasjenige von M bestimmte Gebiet, welches den Punkt A enthält. Da $\{A^n\}$ in sich dicht ist, gibt es einen Exponenten $m \geqq 1$, für welchen A^m hinreichend nahe bei A, also im Gebiet g liegt; bedeute m den kleinsten Exponenten dieser Art. Die von M bestimmten Gebiete gehen bei T in einander über; daraus folgt, daß g bei T^m in sich selbst übergeht. Da g ein Restgebiet der aus endlich vielen Komponenten bestehenden Menge M ist, so hat der Rand von g nur eine endliche Anzahl k von Komponenten. — Das Geschlecht von g könnte 1 oder 0 sein. Wäre es aber gleich 1, so bilden wir g auf eine k-mal punktierte Torusfläche topologisch ab; dadurch entspricht der Abbildung T^m, die in g und auf seinem Rand regulär ist, eine auf der geschlossenen Torusfläche reguläre Abbildung T_1, bei welcher die den Randkomponenten von g entsprechenden k Punkte in einander übergehen; bei einer Potenz T_1^μ geht jeder dieser Punkte in sich über. Aus dem Satz 2 meiner vorangehenden Arbeit[3]) folgt, daß T_1^μ und also auch T_1 periodisch ist. Dementsprechend wäre auch T^m periodisch in g, in Widerspruch zu unserer Annahme, nämlich daß die Potenzen von T fixpunktfrei sind. Das Geschlecht von g muß also gleich 0 sein. — Wir bilden g auf eine k-mal punktierte Kugelfläche topologisch ab; der Abbildung T^m von g auf sich entspricht eine reguläre Abbildung T_1 der geschlossenen Kugelfläche auf sich; T_1 ist einer elliptischen linearen Abbildung homöomorph[4]). Da T^m in g fixpunktfrei ist, so gehören die beiden Fixpunkte von T_1 auf der Kugel zu denjenigen Punkten, die den Randkomponenten von g entsprechen; ihre Anzahl ist also $k \geqq 2$. Wäre aber $k > 2$, so wäre die Abbildung T_1 periodisch; die k Punkte der Kugel, die den Randkom-

---

3) l. c. 1).

4) B. von Kerékjártó, Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen, *diese Acta*, **6** (1934), S. 235—262; Satz I auf S. 250.

ponenten von g entsprechen, sind nämlich invariant bei einer Potenz von T_1; falls $k > 2$, würde diese Potenz mehr als zwei Fixpunkte besitzen, so daß sie die Identität, und also T_1 selbst periodisch wäre; wie bereits oben bemerkt, widerspricht das unseren Voraussetzungen. Somit wurde gezeigt, daß g genau zwei Randkomponenten besitzt.

Die Abbildung T_1 der Kugel, die der Abbildung T^m von g entspricht, ist einer aperiodischen elliptischen Abbildung homöomorph; wir bezeichnen mit $m\alpha$ die zugehörige Rotationszahl, die notwendig irrational ist. Nehmen wir eine invariante Kurve der Abbildung T_1, sei c_0 die ihr entsprechende Kurve in g. Die bei $T^0, T^1, T^2, \ldots, T^{m-1}$ entstehenden Bilder $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ sind paarweise fremd (also homotop); sie zerlegen den Torus in m Gebiete, deren jedes einem ebenen Kreisring homöomorph ist. In jedem dieser Gebiete ist T^m einer aperiodischen elliptischen Abbildung homöomorph. Betrachten wir die entsprechenden bei T^m invarianten Kurven; ihre Gesamtheit bildet eine reguläre[5]) Kurvenschar (c) auf der Torusfläche, die bei T invariant ist.

Den Kurven der Schar (c) ordnen wir Koordinaten $y\,(0 \leqq y < 1)$ auf die folgende Weise zu. Sei c_s eine solche unter den Bildkurven c_i von c_0, die durch die anderen Bildkurven c_i nicht von c_0 getrennt wird; dasjenige durch c_0 und c_s bestimmte Gebiet, welches keine weitere von den Bildkurven c_i enthält, nennen wir das Zwischengebiet von (c_0, c_s). Den Kurven der Schar (c), die im Zwischengebiet von (c_0, c_s) liegen, ordnen wir die Koordinatenwerte $0 \leqq y \leqq \frac{1}{m}$ zu, so daß $y = 0$ der Kurve c_0, und $y = \frac{1}{m}$ der Kurve c_s entspreche. Den Kurven der Schar (c), die im Zwischengebiet von (c_s, c_{2s}) liegen, ordnen wir die Werte $\frac{1}{m} \leqq y \leqq \frac{2}{m}$ zu, auf die Weise, daß das bei T^s entstehende Bild der mit der Koordinate $y\left(\leqq \frac{1}{m}\right)$ versehenen Kurve c den Koordinatenwert $y + \frac{1}{m}$ bekomme; usf. Wenn $\frac{l}{m}$ die Koordinate der

[5]) Wegen dieses Begriffs s. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie* (Berlin, 1923), S. 241 u. ff. und S. 249; vgl. auch die unter [4]) zitierte Arbeit, S. 249 (Nr. 7).

Kurve $c_l = T(c_0)$ bedeutet (wobei l eine der Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$ ist), so wird die durch T in der Schar (c) erzeugte Abbildung durch die Formel $y' = y + \frac{l}{m}$ (mod 1) ausgedrückt.

Auf jeder Kurve der Schar (c) bestimmen wir Koordinaten $x\,(0 \leqq x < 1)$ auf die folgende Weise. Einem beliebigen Punkt P von c_0 ordnen wir den Wert $x = 0$, und den Punkten P^n, die aus P bei den Potenzen von T entstehen, die Werte $x = n\alpha$ (mod 1) zu. Dadurch wird je eine auf den Kurven $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ überall dicht liegende Punktmenge mit x-Koordinaten versehen; auf jeder dieser Kurven ergänzen wir die Koordinatenbestimmung stetig für alle Punkte der Kurve. Seien $O = P, O_1, O_2, \ldots, O_{m-1}$ diejenigen Punkte dieser Kurven, die dabei die Koordinate $x = 0$ bekommen haben. Wir verbinden die Punkte O und O_s im Zwischengebiet (c_0, c_s) durch einen einfachen Bogen b, der mit jeder zwischen c_0 und c_s liegenden Kurve der Schar (c) genau einen gemeinsamen Punkt hat[6]). Den Punkten des Bogens b lassen wir den Wert $x = 0$, und den Punkten des bei T^n entstehenden Bildes von b den Wert $x = n\alpha$ (mod 1) entsprechen (für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Dadurch wird auf jeder Kurve c je eine überall dicht liegende Menge von Punkten mit Koordinaten x versehen; wir erweitern diese Koordinatenbestimmung stetig für sämtliche Punkte der betreffenden Kurven.

Auf diese Weise erhalten wir ein Koordinatensystem (x, y), durch welches die Punkte der Torusfläche eineindeutig und stetig dargestellt werden. In diesem Koordinatensystem wird die Abbildung T durch die folgenden Formeln ausgedrückt:

$$T: \left\{ \begin{aligned} x' &= x + \alpha \\ y' &= y + \beta \end{aligned} \right\} \pmod 1 \quad \left(\alpha \text{ irrational}; \ \beta = \frac{l}{m} \text{ rational}\right).$$

Zweiter Fall. *Die Menge $\{P^n\}$ der sukzessiven Bilder eines Punktes P ist überall dicht auf dem Torus.*

Wir beweisen zunächst die folgende Behauptung: *Wenn eine Potenz T^n von T irgend einen Punkt A um weniger als $\varphi(\varepsilon/3)$ verlegt, so gehört T^n zur ε-Umgebung der Identität* (das soll bedeuten, daß T^n jeden Punkt B um einen Abstand $\leqq \varepsilon$ verlegt; wir werden auch kurz sagen, daß T^n eine *ε-Abbildung* ist). Sei

---

[6]) Wegen der Möglichkeit dieser Konstruktion vgl. l. c. [5]).

nämlich B ein beliebiger Punkt von F; da $\{A^n\}$ auf F überall dicht liegt, gibt es einen Exponenten r, für welchen $(A^r, B) < \varphi(\varepsilon/3)$; für jedes n ist dann $(A^{r+n}, B^n) < \varepsilon/3$. Sei n ein solcher Exponent, für den $(A, A^n) < \varphi(\varepsilon/3)$, es folgt also $(A^r, A^{r+n}) < \varepsilon/3$. Daraus ergibt sich $(B, B^n) \leqq (B, A^r) + (A^r, A^{r+n}) + (A^{r+n}, B^n) < \varepsilon$.

Wir definieren jetzt eine *kontinuierliche Gruppe*, indem wir die Gruppe $\{T^n\}$ durch ihre Grenztransformationen erweitern. Zu diesem Zweck wählen wir einen beliebigen Punkt O von F als Anfangspunkt und lassen ihm die Identität I entsprechen. Zu jedem Punkt P der Fläche F ordnen wir eine topologische Abbildung S_P von F auf sich, die den Punkt O in P überführt; wenn $P = O^n$, so bedeutet S_P die Abbildung T^n. Da die Menge $\{O^n\}$ auf F überall dicht liegt, gibt es zu einem beliebigen Punkt P eine solche Folge von Exponenten $n_1, n_2, \ldots$, für welche die Punkte $O^{n_1}, O^{n_2}, \ldots$ gegen P konvergieren.

Die Folge der Abbildungen $T^{n_1}, T^{n_2}, \ldots$ konvergiert gleichmäßig gegen eine topologische Abbildung S_P von F auf sich, die O in P überführt. Um diese Behauptung zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß, für einen beliebigen Punkt A, die Folge $A^{n_1}, A^{n_2}, \ldots$ gegen einen Punkt A' konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; da die Punktfolge $O^{n_1}, O^{n_2}, \ldots$ gegen P konvergiert, gibt es einen Index k von der Art, daß für jeden Index $r > k$ der Punkt O^{n_r} im Abstand $< \frac{1}{2}\varphi(\varepsilon/3)$ vom Punkt P liegt. Für je zwei Zahlen $r > k$ und $s > k$ haben die Punkte O^{n_r} und O^{n_s} einen Abstand $< \varphi(\varepsilon/3)$, so daß die Abbildung $T^{n_s - n_r}$, die O^{n_r} in O^{n_s} überführt, zur ε-Umgebung der Identität gehört. Insbesondere haben also die Punkte A^{n_r} und $A^{n_s} = T^{n_s - n_r}(A^{n_r})$ einen Abstand $< \varepsilon$, und das gilt für zwei beliebige Zahlen n_r und n_s der Folge, deren Indizes r und s größer als k sind. Nach dem Cauchyschen Konvergenzprinzip folgt daraus, daß die Folge $A^{n_1}, A^{n_2}, \ldots$ gegen einen Punkt A' konvergiert. — In der Ungleichheit $(A^{n_r}, A^{n_s}) < \varepsilon$ halten wir r fest und lassen s unbegrenzt zunehmen, so ergibt sich $(A^{n_r}, A') \leqq \varepsilon$ Somit wurde gezeigt, daß S_P eindeutig ist, und die Folge $T^{n_1}, T^{n_2}, \ldots$ gleichmäßig gegen S_P konvergiert. — Um die Stetigkeit von S_P nachzuweisen, bezeichnen wir mit $A_1, A_2, \ldots$ eine beliebige gegen A konvergierende Punktfolge, und setzen $A' = S_P(A)$, $A'_\nu = S_P(A_\nu)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; wenn ν hinreichend groß ist, so ist $(A_\nu, A) < \varphi(\varepsilon)$, also für jedes n_k: $(A_\nu^{n_k}, A^{n_k}) < \varepsilon$ und folglich $(A'_\nu, A') \leqq \varepsilon$. — Für je zwei verschiedene Punkte A und B sind die Punkte $A' = S_P(A)$ und $B' = S_P(B)$ verschieden; sei nämlich $\varepsilon > 0$ kleiner als der Abstand (A, B); der Abstand (A', B') ist dann nicht kleiner als $\varphi(\varepsilon)$; sonst gäbe es einen Index n_k, für den (A^{n_k}, B^{n_k}) ebenfalls kleiner als $\varphi(\varepsilon)$ wäre; es müßte dann der Abstand der Punkte $A = T^{-n_k}(A^{n_k})$ und $B = T^{-n_k}(B^{n_k})$ kleiner als ε sein, gegen Annahme. — Die obige Behauptung wurde somit bewiesen.

Auch die auf diese Weise erklärten Abbildungen S_P haben die Eigenschaft, daß *jede Abbildung S_P, die einen beliebigen Punkt um weniger als $\varphi(\varepsilon/3)$ verlegt, eine ε-Abbildung ist;* der Beweis ergibt sich unmittelbar auf Grund der analogen Eigenschaft der Abbildungen T^n. Darin ist insbesondere enthalten, daß *keine von der Identität verschiedene Abbildung S_P einen Fixpunkt besitzt.*

Wir wollen zeigen, daß *die Abbildungen S_P auf der Torusfläche eine einfach transitive kontinuierliche Gruppe G bilden.*

Sei S_P eine Abbildung, die durch die Exponentenfolge $n_1, n_2, \ldots$ definiert wurde; die *Inverse* von S_P wird durch die Exponentenfolge $-n_1, -n_2, \ldots$ definiert. Sei nämlich $\bar{P}$ derjenige Punkt, welcher bei S_P in den Punkt O übergeht; die Folge $\bar{P}^{n_1}, \bar{P}^{n_2}, \ldots$ konvergiert gegen O. Wenn $\varepsilon > 0$ beliebig, und $(\bar{P}^{n_k}, O) < \varphi(\varepsilon)$, so ist $(\bar{P}, O^{-n_k}) < \varepsilon$, also konvergiert die Folge $O^{-n_1}, O^{-n_2}, \ldots$ gegen $\bar{P}$.

Ebenso ergibt sich, daß das *Produkt* der Abbildungen S_P und S_Q, die bzw. durch die Exponentenfolgen $n_1, n_2, \ldots$ und $m_1, m_2, \ldots$ definiert werden, die durch die Exponentenfolge $n_1 + m_1$, $n_2 + m_2, \ldots$ definierte Abbildung S_R ist. — Daraus folgt auch gleich, daß die Gruppe der Abbildungen S_P *kommutativ* ist.

Die Stetigkeit der Gruppe G ergibt sich folgendermaßen. Unter dem Abstand (S_P, S_Q) der Abbildungen S_P und S_Q verstehen wir den maximalen Abstand der Punkte $S_P(A)$ und $S_Q(A)$, wo A einen veränderlichen Punkt von F bedeutet. Es bestehen die Beziehungen: $(S_P, S_Q) = (S_P^{-1} S_Q, I) = (S_Q^{-1} S_P, I)$; zufolge der Kommutativität von G auch $(S_P, S_Q) = (S_P S_Q^{-1}, I) = (S_Q S_P^{-1}, I)$. — Die Abbildung S_P hängt von P stetig ab; wenn nämlich $(Q, P) < \varphi(\varepsilon/3)$, so ist $S_Q^{-1} S_P$ eine ε-Abbildung, also $(S_P, S_Q) \leqq \varepsilon$. — Die Inverse von S_P und das Produkt von S_P und S_Q ändern sich stetig mit P, bzw. mit P und Q. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; wenn P_1 und Q_1 zwei solche Punkte sind, daß $(P, P_1) < \varphi(\varepsilon/3)$ und $(Q, Q_1) < \varphi(\varepsilon/3)$, so sind $S_{P_1}^{-1} S_P$ und $S_{Q_1}^{-1} S_Q$ ε-Abbildungen. Daraus folgt: $(S_P^{-1}, S_{P_1}^{-1}) = (S_{P_1} S_P^{-1}, I) \leqq \varepsilon$; und $(S_P S_Q, S_{P_1} S_{Q_1}) = ((S_{P_1} S_{Q_1})^{-1} (S_P S_Q), I)$; zufolge der Kommutativität ist aber $(S_{P_1} S_{Q_1})^{-1} (S_P S_Q) = (S_{P_1}^{-1} S_P)(S_{Q_1}^{-1} S_Q)$ und als Produkt von zwei ε-Abbildungen hat diese von der Identität den Abstand $\leqq 2\varepsilon$. — Die obige Behauptung betreffend die Gruppe G ist also bewiesen.

In einer früheren Arbeit[7]) habe ich die möglichen topologischen Typen der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen bestimmt; aus ihrer Aufzählung ergibt sich, daß G als eine einfach transitive kontinuierliche Gruppe auf dem Torus mit der Gruppe der Verschiebungen des Torus homöomorph ist und in geeignet gewählten Koordinaten (x, y) und Parametern (ξ, η) durch die folgenden Formeln dargestellt werden kann:

$$G: \left\{ \begin{aligned} x' &= x + \xi \\ y' &= y + \eta \end{aligned} \right\} \pmod 1 \quad \left\{ \begin{aligned} 0 \leqq x < 1;\ 0 \leqq \xi < 1; \\ 0 \leqq y < 1;\ 0 \leqq \eta < 1. \end{aligned} \right.$$

Die gegebene Abbildung T, als eine zur Gruppe G gehörige Abbildung, läßt sich also durch die Formeln ausdrücken:

$$T: \left\{ \begin{aligned} x' &= x + \alpha \\ y' &= y + \beta \end{aligned} \right\} \pmod 1.$$

Aus der Voraussetzung, daß die Menge der sukzessiven Bilder eines Punktes auf der Torusfläche überall dicht liegt, folgt, daß die Zahlen $1, \alpha, \beta$ rational unabhängig sind.

Der zu Anfang dieser Arbeit aufgestellte Satz wurde somit bewiesen. Dieser und der Satz 6 der vorangehenden Arbeit ergeben zusammen das folgende Resultat:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine indikatrixerhaltende topologische Abbildung einer geschlossenen oder berandeten orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$ auf sich einer konformen Abbildung homöomorph sei, ist die, daß die Abbildung in jedem Punkte der Fläche regulär sei.

Bemerkung. Die oben im „zweiten Fall" gegebenen Betrachtungen können unmittelbar auf kompakte Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension angewandt werden. Sei F eine kompakte h-dimensionale Mannigfaltigkeit und T eine reguläre Abbildung

[7]) B. VON KERÉKJÁRTÓ, Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen, *Abhandlungen Math. Seminar Hamburg*, **8** (1930), S. 107—114.

von F auf sich. Wenn die Menge $\{P^n\}$ der sukzessiven Bilder eines Punktes P in einem Gebiet von F überall dicht liegt, bezeichnen wir mit g das größte Gebiet dieser Art, und konstruieren aus den Abbildungen T^n und ihren Grenztransformationen eine kontinuierliche Gruppe G, die in der von den Häufungspunkten von g gebildeten Menge einfach transitiv ist. Aus der Homogenität des Parameterraumes von G folgt, daß g keinen Randpunkt in F haben kann, und also g mit F identisch ist. Da ferner die Gruppe G kommutativ und kompakt ist, so folgt aus einem Satz von NEWMAN[8]), daß F die h-dimensionale Ringmannigfaltigkeit, d. h. das topologische Produkt von h Kreislinien ist, und G die Gruppe der Verschiebungen dieser Mannigfaltigkeit in sich, die in geeignet gewählten Koordinaten x_i und Parametern ξ_i durch die Formeln dargestellt werden kann: $x'_i = x_i + \xi_i \pmod 1$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$. Die Abbildung T ist dann durch die Formeln $x'_i = x_i + \alpha_i \pmod 1$ darstellbar, wo $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ rational unabhängige Zahlen sind. — Dieses Resultat ergibt die Mitteln zur Untersuchung der regulären Abbildungen von kompakten Mannigfaltigkeiten, worauf ich in einer anderen Mitteilung eingehen werde.

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit bildet einen Teil meiner an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 8. Oktober 1934 gehaltenen Antrittsvorlesung.

(Eingegangen am 9. Oktober 1934.)

8) M. H. A. NEWMAN, On Abelian Continuous Groups, *Proceedings Cambridge Philosophical Society,* **27** (1931), pp. 387—390. Siehe ferner L. PONTRJAGIN, The Theory of Topological Commutative Groups, *Annals of Math.,* **35** (1934), pp. 361—388, wo das Problem der Strukturbestimmung von kommutativen Gruppen in seiner allgemeinsten Form gelöst wird.