Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen.

Von S. SIDON in Budapest.

Trigonometrische Reihen mit Lücken sind Gegenstand mehrerer in letzterer Zeit erschienenen Arbeiten. Mit Hilfe eines zum ersten Male von Herrn F. RIESZ angewandten Produktes[1]) bewies ich[2])

Satz 1. *Erfüllt die unendliche Folge positiver ganzer Zahlen* $n_1 \dots n_k \dots$[3]) *die Bedingung* A:

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > g > 1 \qquad (g \text{ von } k \text{ unabhängig}),$$

so muß, wenn $\sum_{k+1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b \sin n_k x)$ *die Fourier-Reihe*[4]) *einer einseitig beschränkten Funktion ist,* $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ *konvergieren.*

Später bewies ich[5]) den

---

1) F. RIESZ, Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung, *Math. Zeitschrift*, **2** (1918), S. 312—315.

2) S. SIDON, Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourierreihen, in denen sehr viele Glieder fehlen, *Math. Annalen*, **96** (1927), S. 418—419 und Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken, *Math. Annalen*, **97** (1927), S. 675—676.

3) Mit $n_1, \dots, n_k, \dots$ bezeichnen wir hier immer Folgen positiver ganzer Zahlen und zwar ist für jedes k $n_{k+1} > n_k$.

4) Fourier-Reihe bedeutet hier immer: Fourier-Reihe einer im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion.

5) S. SIDON, Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **163** (1930), S. 251—252 und Ein Satz über Fouriersche Reihen mit Lücken, *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), S. 481—484. Den Zitaten der letzteren Arbeit füge ich hinzu: A. ZYGMUND, On the Convergence of Lacunary Trigonometric Series, *Fundamenta Math*, **16** (1930), S. 90—107, wo der 2 enthaltende Satz bewiesen wird: *Ist Bedingung* B *erfüllt und* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ *in einer Menge von positivem Maße nach einem die Toeplitzschen Bedingungen erfüllenden linearen Verfahren summierbar, so konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$.

Satz 2. *Erfüllt die Folge* $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ *die Bedingung* B:[6]) *In der Folge* $n_{11} = 2n_1$, $n_{12} = n_1 + n_2$, $n'_{12} = n_2 - n_1, \ldots, n_{ii} = 2n_i, \ldots, n_{ik} = n_i + n_k$, $n'_{ik} = n_k - n_i, \ldots$ *bleibt die Anzahl der gleichen Glieder unter einer von i und k unabhängigen Schranke G, so muß, wenn* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ *eine Fourier-Reihe ist,* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ *konvergieren.*

Letzterer Satz hat sich als Folge des Bestehens der Ungleichung

$$\text{(I)} \qquad \int_0^{2\pi} |T_k(x)|\,dx > C\left[\int_0^{2\pi} T_k^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

mit von $T_k(x)$ unabhängigem $C > 0$[7]) für jedes trigonometrische Polynom $T_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (a_i \cos n_i x + b_i \sin n_i x)$ ergeben. Bedingung B ist für das Bestehen von (I) hinreichend, aber nicht notwendig.[8]) Die durch das Bestehen von (I) definierte Eigenschaft einer Indexfolge nennen wir die Eigenschaft I[9]).

In engem Zusammenhange mit den soeben zitierten Sätzen stehen diejenigen über die zu einer Lückenbedingung genügenden Indexfolge gehörigen Fourier-Koeffizienten. Wieder durch Anwendung des F. Rieszschen Produktes erhielt ich[10]) den

Satz 3. *Sind* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ *und* $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_k, \ldots$ *zwei reelle Nullfolgen, so gibt es, wenn* $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ *die Bedingung A erfüllt, eine Fourier-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *mit* $a_{n_k} = \varepsilon_k$, $b_{n_k} = \varepsilon'_k$.

Herr BANACH bewies[11]) den

Satz 4. *Besitzt* $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ *die Eigenschaft* I, *so existiert, wenn*

---

6) Bedingung B enthält die oben mit A bezeichnete als Spezialfall.

7) C, C' werden hier auch weiter diese Bedeutung haben.

8) Siehe Teil 2 dieser Note.

9) und zwar sagen wir, die nämliche Indexfolge besitze die Eigenschaft I mit der Konstante C, wenn letztere die Konstante der zur Folge gehörigen Ungleichung I ist.

10) S. SIDON, Einige Sätze und Fragestellungen über Fourier-Koeffizienten, *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), S. 477–480. Eingesendet am 1. August 1928.

11) S. BANACH, Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, *Studia math.*, **2** (1930), S. 207–220.

$\sum (\varepsilon_k^2 + \varepsilon_k'^2)$ *konvergiert, eine stetige Funktion,*[12]) *für deren Fourier-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad a_{n_k} = \varepsilon_k, \; b_{n_k} = \varepsilon_k'$ *gilt.*[13])

Dieser Satz, dessen Richtigkeit zu entscheiden, ich loc. cit. [10]) als Problem gestellt habe, wurde von mir unabhängig wiedergefunden und mit einer von der in der Banachschen Arbeit angewandten verschiedenen Methode bewiesen.[14])

Folgende Zeilen enthalten einige einfache ergänzende Bemerkungen zu den oben angeführten Resultaten. Am Ende dieser Note befasse ich mich auch mit der Gesamtheit der Fourier-Konstanten stetiger Funktionen.

1.

Paley und Zygmund bewiesen[15]): Ist $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ konvergent, so lassen sich die Faktoren $\varepsilon_n = \pm 1$ derart bestimmen, daß für beliebiges $\delta > 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n (\log n)^{-\left(\frac{1}{2}+\delta\right)} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

---

12) Stetige Funktion bedeutet hier immer eine für $0 \leqq x < 2\pi$ überall stetige Funktion.

13) Bei Banach ist Satz 4, den er als Korollar eines für allgemeine Orthogonalsysteme gültigen Satzes erhält, nur für den Fall des Erfülltseins der Bedingung A ausgesprochen, im Beweise aber nur I berücksichtigt.

14) S. Sidon, Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, *Math. Annalen*, **106** (1932), S. 536—539: Der erste Teil des dort für Satz gegebenen Beweises läßt sich kürzen: Durch Kombination der mit $\max \left| \sum_{i=1}^{k} (a_i c_{n_i} + b_i d_{n_i}) \right| > C \left[\sum_{i=1}^{k} (a_i^2 + b_i^2) \right]^{\frac{1}{2}}$ — wo a_i und b_i beliebige reelle Konstanten, c_n und d_n die Fourier-Konstanten der Funktionen bedeuten, die dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben — äquivalenten Ungleichung I mit dem dort angewandten geometrischen Lemma folgt sofort die Existenz einer Folge gleichmäßig beschränkter Funktionen $f_1(x), \ldots, f_k(x), \ldots$, in deren Fourier-Reihe $f_k(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (c_{nk} \cos nx + d_{nk} \sin nx) \quad c_{n_i k} = \varepsilon_i$, $d_{n_i k} = \varepsilon_i'$ für $i \leqq k$ ist. Dieser Teil des Beweises, sowie die Auswahl einer schwachkonvergenten Folge aus der Folge der $f_k(x)$ mit der beschränkten Grenzfunktion $f(x) \sim \Sigma(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$, wo $c_{n_i} = \varepsilon_i$, $d_{n_i} = \varepsilon_i'$ ist, läßt sich unmittelbar auf allgemeine Orthogonalsysteme übertragen.

15) R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, On Some Series of Fonctions, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **26** (1930), S. 337—357, insb. Theorem VII.

die Fourier-Reihe einer stetigen Funktion sei. Hieraus folgt unmittelbar: Hat $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Eigenschaft, daß wenn $\sum_{k=0}^{\infty}(A_k \cos n_k x + B_k \sin n_k x)$ die Fourier-Reihe einer stetigen Funktion ist, $\sum_{k=1}^{\infty}(|A_k|+|B_k|)$ konvergiert, so muß $\sum_{k=1}^{\infty}(\log n_k)^{-(1+\delta)}$ für jedes $\delta > 0$ konvergieren, dies ist auch die notwendige Bedingung dafür, daß die zu den Indizes $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ gehörigen Fourier-Konstanten einer im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion außer der Konvergenz gegen 0 keiner anderen Beschränkung unterworfen seien.

2.

Daß Bedingung B die Eigenschaft I zur Folge hat, hat sich aus

$$\frac{\left[\int_0^{2\pi} |T_k(x)|\, dx\right]^2}{\int_0^{2\pi} T_k^2(x)\, dx} > \frac{\left[\int_0^{2\pi} T_k^2(x)\, dx\right]^2}{\int_0^{2\pi} T_k^4(x)\, dx}$$

ergeben. Nun ist aber

$$\frac{\left[\int_0^{2\pi} T_k^2(x)\, dx\right]^2}{\int_0^{2\pi} T_k^4(x)\, dx} > \frac{\frac{1}{2}\left[\int_{|z|=1} |P_k^2(z)|\, d(\arg z)\right]^2}{\int_{|z|=1} |P_k^4(z)\, d(\arg z)|}$$

wo das rationale Polynom $P_k(z)$ durch $\Re[P_k(z)] = T_k(\arg z)$ für $|z|=1$ definiert ist. Für das Bestehen von I ist also schon hinreichend, daß in der Folge $n_{11} = 2n_1$, $n_{12} = n_1 + n_2, \ldots, n_{ik} = n_i + n_k, \ldots$ die Anzahl der gleichen Glieder unter einer von i und k unabhängigen Schranke bleibe; auch die Vereinigung endlich vieler solcher n_k-Folgen besitzt die Eigenschaft I. Diese Verallgemeinerung der Bedingung B bezeichnen wir mit B'.[16])

3.

Einer Arbeit von PALEY[17]) läßt sich die Tatsache entnehmen,

[16]) B' ist tatsächlich wesentlich allgemeiner, als B; z. B. wenn $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ der Bedingung A genügt, erfüllt die Folge der $\sum_{i=1}^{l} n_{k_i}$, wo l unter einer festen Schranke bleibt, die Bedingung B', aber nicht B.

[17]) R. E. A. C. PALEY, A Note on Power Series, *Journal of the London Math. Society*, 7 (1932), S. 122—130.

daß für jede Folge $n_1, \ldots, n_i, \ldots$ von der Eigenschaft I

$$\max\left|\sum_{i=1}^{k} a_{n_i}\alpha_i\right| > C'\left(\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i^2|\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, wo C' nur von der Konstante von I abhängt, α_i beliebige komplexe Konstanten bedeuten und die a_n die Koeffizienten der Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ durchlaufen, die für $|z| \leq 1$ stetig und dem Betrage nach kleiner, als 1 sind.[18]) Es gilt also der Satz 4 verschärfende

S a t z 4'. *Hat* $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ *die Eigenschaft* I *und ist* $\sum_{k=1}^{\infty}|\varepsilon_k^2|$ *konvergent, so gibt es eine für* $|z| = 1$ *stetige Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *mit* $a_{n_k} = \varepsilon_k$.

Ich erwähne hier, daß wenn die Indexfolge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Bedingung A erfüllt und $\sum_{k=1}^{\infty}|\varepsilon_k^2|$ konvergiert, sich die Existenz einer für $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergenten Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_{n_k} = \varepsilon_k$ beweisen läßt.[19]) Hieraus folgt, daß der Carlemansche

---

[18]) Es folgt auch aus dem Bestehen von

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i' \cos n_i x + \alpha_i'' \sin n_i x)\right| dx > C\left[\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i'^2 + \alpha_i''^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

für eine gewisse reelle Konstantenfolge α_i', α_i''

$$\max\left|\sum_{i=1}^{k} a_{n_i}(\alpha_i' + i\,\alpha_i'')\right| > C\left[\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i'^2 + \alpha_i''^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

[19]) Dieselbe ergibt sich durch Komposition der nach Satz 4' existierenden für $|z| \leq 1$ stetigen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_{n_i} = \varepsilon_i p$ mit dem F. Rieszschen Kerne $\sum_{r=0}^{l-1}\prod_{k=0}^{\infty}(1 + p^{-1}\cos n_{kl+r}x)$, wo $p > 1$ und fest ist, l den Ungleichungen $q^l > 3$, $1 + \frac{1}{q^l - 1} < q$ genügt $\left(q \text{ bedeutet hierbei } \overline{\lim}\ \frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$.
Für die Partialsummen $s_k(x)$ des letzteren gilt: $\int_0^{2\pi}|s_k(x)|\,dx = O(1)$.

Satz über den Konvergenzexponenten der Fourier-Konstanten der stetigen Funktionen sowie dessen von Herrn GRONWALL und von mir herrührende Verschärfungen[20]) schon für die Klasse der für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergenten Potenzreihen gelten, was auf das Verhältnis zwischen gleichmäßiger und absoluter Konvergenz der Potenzreihen neues Licht wirft.[21]) Es gilt auch der folgende algebraische

Satz 5. *Ist $\Sigma |\varepsilon_i^2| = 1$ und besitzt die Folge der n_i die Eigenschaft* I, *so gibt es ein Polynom $\sum\limits_{l=0}^{n_k} a_l z^l$ mit $a_{n_i} = \varepsilon_i$ für $i \leqq k$, welches für $|z| \leqq 1$ die Ungleichung $\left|\sum\limits_{l=0}^{n_k} a_l z^l\right| < C$ erfüllt.*

Beim Beweise dieses Satzes benötige ich den

Hilfssatz. *Erfüllt jedes komplexe Polynom $P_k(z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i z^{n_i}$ die Ungleichung*

$$\int\limits_{|z|=1} |P_k(z)|\, d\varphi > C' \Big[\int\limits_{|z|=1} |P_k(z)|^2 d\varphi \Big]^{\frac{1}{2}},$$

(wo $\varphi = \arg z$), so besitzt die Folge der n_i die Eigenschaft I *mit einer nur von C' abhängigen Konstante.*[22])

Beweis des Hilfssatzes. Es ist, wenn die a_i die Koeffizienten der Potenzreihen durchlaufen, die für $|z| < 1$ dem

---

[20]) T. CARLEMAN, Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion, *Acta math.*, **41** (1918), S. 377—384; T. H. GRONWALL, On the Fourier Coefficients of a Continuous Function, *Bulletin of the American Math Society*, **27** (1921), S. 320—321 und meine in [5]) an erster Stelle zitierte Arbeit.

[21]) Siehe z. B. E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (Berlin, 1929), S. 68—69.

[22]) Dieses Lemma, das den ersten Teil von **2** als Spezialfall enthält, ergibt sich hier als Korollar der Tatsache: Aus

$$\int\limits_{|z|=1} \left| \sum_{i=1}^{k} a_i z^{n_i} \right| d\varphi > C \left[\sum_{i=1}^{k} |a_i^2| \right]^{\frac{1}{2}},$$

für eine gewisse unendliche Konstantenfolge n_i, folgt

$$\int\limits_{|z|=1} \left| \Re \Big(\sum_{i=1}^{k} a_i z^{n_i} \Big) \right| dz \text{ und } \int\limits_{|z|=1} \left| \Im \Big(\sum_{i=1}^{k} a_i z^{n_i} \Big) \right| dz > C' \Big(\sum_{i=1}^{k} |v_i^2| \Big)^{\frac{1}{2}},$$

wo C' nur von C abhängt.

Betrage nach kleiner als 1 sind,

$$C'\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i^2|\right)^{\frac{1}{2}}<2\int\limits_{|z|=1}\left|\Re\left(\sum_{i=1}^{k}a_i z^{4^{n_i}-1}\right)\right|d\varphi<C''\max\left|\sum_{i=1}^{k}a_i a_{4^{n_i}-1}\right|<$$
$$<C''\max\left|\sum_k a_i a_{4^{n_i}}\right|<$$
$$<C'''\int\limits_{|z|=1}\left|\Re\left(\sum_{i=1}a_i z^{n_i}\right)\right|d\varphi$$

(C'', C''' hängt nur von C' ab), woraus die Behauptung folgt.

Beweis des Satzes 5. Es bezeichne $P_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ eine Potenzreihe mit $a_{n_i}=\varepsilon_i$ für $i\leq k$, für welche im Einheitskreise $|P_k(z)|<C$ gilt. Aus dem soeben bewiesenen Hilfssatze[23]) folgt auch die Existenz einer Potenzreihe $g_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ mit $b_{n_k-n_i}=\varepsilon_i$ für $i\leq k$, welche für $|z|<1$ ebenfalls die Ungleichung $|g_k(z)|<C$ erfüllt. Bezeichnet $S_i(z)$, $T_i(z)$ das i-te arithmetische Mittel von $f_k(z)$, bzw. $g_k(z)$, so ist $S_{n_k}(z)+z^{n_k}T_{n_k}\left(\frac{1}{z}\right)$ ein Polynom von der gewünschten Beschaffenheit.

4.

Erfüllt die Indexfolge $n_1,\ldots,n_k,\ldots$ die Bedingung B', so gilt außer I auch

$$\left[\int_0^{2\pi}T_k^2(x)\,dx\right]^2>C\int_0^{2\pi}T_k^4(x)\,dx,$$

wodurch die Frage nahegelegt wird, ob nicht schon die Folge der Exponenten von $T_k^2(x)$, also $2n_1$, n_1+n_2, $n_2-n_1,\ldots,2n_i,\ldots,$ n_i+n_k, $n_k-n_i\,(k>i),\ldots$ die Eigenschaft I besitzt. Hierauf beziehen sich folgende Bemerkungen.

a) Sind die Glieder der Folge $2n_1$, $n_1+n_2,\ldots,n_i+n_k,\ldots,(i\leq k)$ alle von einander verschieden und ist $k'<qk$, wo k' durch $n_{k'}<2n_k<n_{k'+1}$ definiert, $q<\frac{5}{4}$ und von k unabhängig ist, so gilt, wenn $N_1>N_2>\ldots>N_i>\ldots$ die der Größe nach geordneten

[23]) wenn derselbe auf die endliche Folge $n_k-n_1,\ldots,n_k-n_i,\ldots,0$ angewendet wird,

Glieder der Folge $n_i + n_k$ bedeuten,

$$\int\limits_{|z|=1} \left| \sum_{i=1}^{K} z^{N_i} \right| dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{|z|=1} \left| \left(\sum_{j=1}^{k} z^{n_j} \right)^2 + \sum_{j=1}^{k} z^{2n_j} + 2 \sum_{l>k,\ n_j+n_l \leq N_K} z^{n_j+n_l} \right| dz > C K^{\frac{1}{2}},^{24})$$

wo k durch $2n_k < N_K < 2n_{k+1}$ bestimmt ist. Nach dem in **3** bewiesenen Hilfssatze folgt also auch

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{K} \cos N_i x \right| dx \text{ und } \int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{K} \sin N_i x \right| dx > C K^{\frac{1}{2}}.$$

β) Erfüllt die Folge der n_k die Bedingung B mit $G = 1$, so gilt, wenn $N_1, \ldots, N_i, \ldots, N_K$ die Glieder der endlichen Folge $0, 2n_1, n_1 + n_2, n_2 - n_1, \ldots, 2n_j, \ldots, n_j + n_l, n_l - n_j, \ldots, 2n_k$, wo $l > j$, j und $l < k$, bezeichnen, für jedes trigonometrische Polynom

$$T_K(x) = \sum_{i=1}^{K} (A_i \cos N_i x + B_i \sin N_i x)$$

die Darstellung

$$T_K(x) = \sum_{l=1}^{k+1} \left[\sum_{j=1}^{k} (a_{jl} \cos n_j x + b_{jl} \sin n_j x) \right]^2,$$

wo die Konstanten a und b im Allgemeinen komplex sind. Sind sie reell (also ist $T_K(x)$ jedenfalls positiv), so ergibt sich sehr leicht die Ungleichung

$$2 \left[\int_0^{2\pi} T_K(x) \right]^2 > \int_0^{2\pi} T_K^2(x)\, dx.$$

Gilt eine analoge Ungleichung nicht auch im allgemeinen Falle? Ich halte das, besonders, wenn $T_K(x)$ positiv ist, für wahrscheinlich.

5.

Sind die α_i und β_i beliebige reelle Konstanten und durchlaufen die a_i und b_i die Fourier-Konstanten der stetigen Funktionen die dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben, so ist[25])

[24]) Aus dieser Tatsache folgt der in **3** angeführte Carlemansche Satz, der somit auf die einfachste Weise bewiesen ist.

[25]) Siehe meine Note: Ein Satz über die Fouriersche Reihen stetiger Funktionen, *Math. Zeitschrift*, 34 (1932), S. 485—486 und Paley, loc. cit. [17]).

$$\max \sum_{i=0}^{n} (|a_i \alpha_i| + |b_i \beta_i|) > C \left[\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i^2 + \beta_i^2) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus ergibt sich durch Kombination mit dem loc. cit. [14]) angewandten geometrischen Lemma

Satz 6. *Der kleinste konvexe Bereich der Punkte mit den Koordinaten* $\varepsilon_0 a_0, \varepsilon_1 a_1, \varepsilon_1' b_1 \ldots \varepsilon_k a_k, \varepsilon_k' b_k \ldots \varepsilon_n a_n, \varepsilon_n' b_n$, *wo* ε_k *und* $\varepsilon_k' = \pm 1$, *enthält eine* $2n+1$ *dimensionale Kugel vom Radius* C,[26]) *deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist.*

Gilt dieser Satz auch für $n = \infty$?[27]) Aus der bejahenden Beantwortung dieser Fragestellung,[28]) deren Beweis ich in einer baldigen Mitteilung zu geben hoffe, folgt: Der kleinste konvexe Bereich der Punkte mit den Koordinaten $\varepsilon_0 A_0, \ldots, \varepsilon_n A_n, \varepsilon_n' B_n, \ldots$ wo ε_n und $\varepsilon_n' = \pm 1$ und die A_n, B_n die Fourier-Konstanten der stetigen Funktionen durchlaufen, ist der ganze Hilbertsche Raum.

Der aus Satz 6 durch Ersetzung der n-ten Partialsummen der Fourier-Reihen der gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen durch die in den Einheitswurzeln $\left(\text{d. h. an den Stellen } x = \frac{2k\pi}{2n+1},\ 0 \leq k \leq 2n\right)$ gleichmäßig beschränkten trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung entstehende ebenfalls richtige[29]) Satz läßt sich geometrisch so formulieren: Ist der Mittelpunkt eines Würfels $2n+1$-ter Dimension von der Kantenlänge $(2n+1)^{-\frac{1}{2}}$ Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, auf welches bezogen die Kanten des Würfels die Koeffizienten der orthogonalen Substitution

$$y_0 = (2n+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2n} x_k,$$

$$y_i = 2(2n+2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2n} \cos \frac{2ik\pi}{2n+1} x_k,$$

$$y_i' = 2(2n+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2n} \sin \frac{2ik\pi}{2n+1} x_k$$

---

26) C bedeutet jetzt eine von n unabhängige Konstante.

27) Hierbei ist unter dem kleinsten konvexen Bereich einer Punktmenge des Hilbertschen Raumes die Gesamtheit der Schwerpunkte aller aus *endlich vielen* Punkten der Menge bestehenden Kombinationen zu verstehen.

28) Es genügt die Frage für die Klasse der beschränkten Funktionen zu erledigen. Bei festem k bilden dann die Schwerpunkte k-ter Ordnung der in Rede stehenden Menge eine perfekte Menge des Hilbertschen Raumes.

29) Gilt auch für die gleichmäßig beschränkten Polynome n-ter Ordnung.

für $1 \leqq i \leqq n$ als Richtungskosinusse haben, so enthält der kleinste konvexe Bereich der Gesamtheit der zu den Punkten des Würfels gehörigen Koordinatenparallelepipeda eine $2n+1$ dimensionale Kugel vom Radius C. Kann hier der Übergang auf den kleinsten konvexen Bereich unterbleiben, so folgt hieraus, daß die Fourier-Konstanten der stetigen Funktionen außer der Konvergenz ihrer Quadratsumme keiner quantitativen Beschränkung unterworfen sind.[30])

(Eingegangen am 30. Juli 1934.)

[30]) loc. cit. [10]) Fragestellung. Berichtigung hiezu, *Math. Zeitschrift,* **35** (1932), S. 624.