

Über die Anzahl der Abelschen Gruppen gegebener Ordnung und über ein verwandtes zahlentheoretisches Problem.

Von P. ERDŐS und G. SZEKERES in Budapest.

Einleitung.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet das Problem des asymptotischen Verhaltens der Anzahl der verschiedenen (d. h. nicht isomorphen) Abelschen Gruppen n -ter Ordnung für große n . Wir bezeichnen diese Anzahl durch $f(n)$ und werden in § 1 beweisen, daß

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n f(k) = An + O(\sqrt{n}),^1)$$

wobei

$$A = \zeta(2)\zeta(3)\zeta(4)\dots$$

($\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zetafunktion). Der Wert von A liegt zwischen 2 und 2,5. Aus (1) folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) \rightarrow A \quad \text{für } n \rightarrow \infty;$$

dies besagt, daß es im Durchschnitt A verschiedene Abelsche Gruppen n -ter Ordnung gibt.

Durch die für (1) verwendete Methode werden wir in § 2 eine weitere zahlentheoretische Funktion asymptotisch abschätzen. Um den Grundgedanken dieser Methode, die übrigens völlig elementar ist, klar hervortreten zu lassen, werden wir denselben in einem allgemeinen Hilfssatz formulieren.

¹⁾ Die O -Relationen beziehen sich auf den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und sind nicht notwendig gleichmäßig in den etwaigen Parametern.

Es sei $\psi(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, welche abzuschätzen ist. Unsere Methode besteht darin, daß wir eine andere zahlentheoretische Funktion $\omega(n)$ nebst einer positiven ganzen Zahl i bestimmen, die mit $\psi(n)$ durch die Formel

$$(2) \quad \psi(n) = \sum_{l=1}^n \omega(l) \left[\sqrt[i]{\frac{n}{l}} \right]$$

verbunden ist.²⁾ Dann schließen wir vom asymptotischen Verhalten der summatorischen Funktion $\chi(n) = \sum_{l=1}^n \omega(l)$ auf das Verhalten von $\psi(n)$.

Der wichtigste Fall des Überganges von $\chi(n)$ auf $\psi(n)$ wird durch den folgenden Hilfssatz ausgedrückt.

Gilt neben (2)

$$(3) \quad \chi(n) = \sum_{l=1}^n \omega(l) = O\left(\sqrt[i+1]{n}\right),$$

so gewinnt man

$$\psi(n) = C\sqrt[i]{n} + O\left(\sqrt[i+1]{n}\right),$$

wobei C die Konstante

$$(4) \quad C = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega(l)}{\sqrt[i]{l}}$$

bedeutet. (In den Anwendungen wird $\omega(n)$ durchwegs positiv sein; dann ist auch $C > 0$.)

Beweis. Bekanntlich folgt aus (3), daß die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega(l)}{l^s}$$

für $s > \frac{1}{i+1}$ konvergent ist mit einem Restglied

²⁾ Die leicht nachzuweisende Tatsache, daß es zu jedem $\psi(n)$ und i eine und nur eine solche Funktion $\omega(n)$ gibt, ferner, daß letztere durch die Formel

$$\omega(n) = \sum_{d^i | n} \mu(d) \left\{ \psi\left(\frac{n}{d^i}\right) - \psi\left(\frac{n}{d^i} - 1\right) \right\}$$

gegeben ist — wobei d diejenigen positiven ganzen Zahlen durchläuft, deren i -te Potenz in n aufgeht — ist für unsere Zwecke belanglos, da wir die Funktion $\omega(n)$ bei jeder Anwendung direkt bestimmen werden können.

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{\omega(l)}{l^s} = O\left(n^{\frac{1}{i+1}-s}\right).$$

Speziell konvergiert auch die Reihe (4) und es gilt

$$\sum_{l=1}^n \frac{\omega(l)}{\sqrt[l]{l}} = C + O\left(n^{\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}}\right).$$

Daher ist wegen (2) und (3)

$$\begin{aligned} \psi(n) &= \sum_{l=1}^n \omega(l) \sqrt[l]{\frac{n}{l}} + \sum_{l=1}^n \omega(l) \left\{ \left[\sqrt[l]{\frac{n}{l}} \right] - \sqrt[l]{\frac{n}{l}} \right\} = \\ &= \sqrt[l]{n} \sum_{l=1}^n \frac{\omega(l)}{\sqrt[l]{l}} + O\left(\sum_{l=1}^n \omega(l)\right) = \\ &= \sqrt[l]{n} \left\{ C + O\left(n^{\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}}\right) \right\} + O\left(\sqrt[l]{n}\right) = C\sqrt[l]{n} + O\left(\sqrt[l]{n}\right), \end{aligned}$$

wie behauptet.

§ 1. Anzahl der Abelschen Gruppen gegebener Ordnung.

In der Einleitung haben wir die Anzahl der verschiedenen Abelschen Gruppen n -ter Ordnung durch $f(n)$ bezeichnet. Zum Zwecke einer Abschätzung der summatorischen Funktion von $f(n)$ drücken wir nun $f(n)$ in einer anderen Form aus.

Es ist bekannt³⁾, daß es so viele verschiedene Abelsche Gruppen n -ter Ordnung gibt, auf wie viele Arten sich n als Produkt von Primzahlpotenzen, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, darstellen läßt.

Es ist zweckmäßig die folgende Verallgemeinerung der zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ zu betrachten:

Wir bezeichnen durch $f_i(k)$ diejenige Zahl, die angibt, auf wieviele Arten sich k , ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, in ein Produkt von Primzahlpotenzen zerlegen läßt, falls nur solche Primzahlpotenzen in Betracht gezogen werden, deren Exponenten $\geq i$ sind. Es ist klar, daß die zahlentheoretische Funktion $f_i(k)$ mit der früher definierten $f(k)$ identisch ist. Ferner ist, falls wir unter einem leeren Produkt 1 verstehen, $f_i(1) = 1$ für jedes i .

³⁾ Vgl. z. B. A. SPEISER, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, II. Auflage (Berlin, 1927), S. 51; oder H. HASSE, *Aufgabensammlung zur höheren Algebra* (Berlin und Leipzig, Sammlung Göschen, 1934), S. 95.

Vor allem wollen wir folgende Relation beweisen :

Es ist

$$(5) \quad f_i(k) = \sum_{d^i|k} f_{i+1}\left(\frac{k}{d^i}\right).$$

Wir beweisen die Richtigkeit dieser Formel zuerst für den Fall, daß $k = p^\alpha$ d. h. Potenz einer Primzahl ist. Zu diesem Zwecke zeigen wir, daß

$$(6) \quad f_i(p^\alpha) = f_{i+1}(p^\alpha) + f_i(p^{\alpha-i}).$$

In der Tat bedeutet $f_i(p^\alpha)$ der Definition gemäß die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} p^\alpha &= p^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots}, \\ i &\leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \end{aligned} \right\}.$$

Diese Lösungen sind teilweise derart, daß $i+1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$, teilweise aber derart, daß $i = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$; die Anzahl der ersteren ist nach Definition $f_{i+1}(p^\alpha)$, die der letzteren $f_i(p^{\alpha-i})$, womit die Richtigkeit der Formel (6) bewiesen ist.

Um hieraus (5) für Primzahlpotenzen zu folgern, setzen wir voraus, daß die Behauptung für $p^{\alpha-i}$ gilt, d. h.

$$(8) \quad f_i(p^{\alpha-i}) = f_{i+1}(p^{\alpha-i}) + f_{i+1}(p^{\alpha-2i}) + \dots$$

Dann ist nach (6)

$$f_i(p^\alpha) = f_{i+1}(p^\alpha) + f_i(p^{\alpha-i}) = f_{i+1}(p^\alpha) + f_{i+1}(p^{\alpha-i}) + \dots,$$

daher gilt die Formel (5) auch für p^α . Für $p^0 = 1, p, p^2, \dots, p^{i-1}$ ist aber (5) offenbar gültig. Damit haben wir (5) für Primzahlpotenzen bewiesen.

Zum vollständigen Beweis haben wir also noch zu zeigen, daß, wenn (5) für k und l gilt (wobei $(k, l) = 1$), so gilt es auch für kl .

Aus der Definition folgt $f_i(kl) = f_i(k)f_i(l)$ für $(k, l) = 1$. Setzen wir jetzt voraus, daß (5) für k und l gilt, dann ist

$$\begin{aligned} f_i(kl) &= f_i(k)f_i(l) = \sum_{d^i|k} f_{i+1}\left(\frac{k}{d^i}\right) \sum_{e^i|l} f_{i+1}\left(\frac{l}{e^i}\right) = \\ &= \sum_{d^i|k, e^i|l} f_{i+1}\left(\frac{k}{d^i}\right) f_{i+1}\left(\frac{l}{e^i}\right) = \sum_{d^i|k, e^i|l} f_{i+1}\left(\frac{kl}{d^i e^i}\right) = \sum_{g^i|kl} f_{i+1}\left(\frac{kl}{g^i}\right), \end{aligned}$$

womit (5) allgemein bewiesen ist.

Wir summieren beide Seiten von (5) für $k = 1, 2, \dots, n$, und erhalten

$$(9) \quad \sum_{k=1}^n f_i(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{d^i | k} f_{i+1}\left(\frac{k}{d^i}\right) = \sum_{l=1}^n f_{i+1}(l) \left[\sqrt[i]{\frac{n}{l}} \right].$$

Um unseren Hilfssatz anwenden zu können, müssen wir

$$\sum_{l=1}^n f_{i+1}(l) = O\left(\sqrt[i+1]{n}\right)$$

beweisen. Zu diesem Zwecke benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Die Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_{i+1}(l)}{\sqrt[i]{l}}$$

ist konvergent; ihre Summe ist

$$(10) \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_{i+1}(l)}{\sqrt[i]{l}} = \zeta\left(1 + \frac{1}{i}\right) \zeta\left(1 + \frac{2}{i}\right) \dots$$

Hier bedeutet für $s > 1$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

die Riemannsche ζ -Funktion.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß das unendliche Produkt A_i auf der rechten Seite von (10) konvergent ist. Für $i=1$ ergibt sich dies wie folgt. Es ist

$$A_1 = \zeta(2) \zeta(3) \dots = (1 + (\zeta(2) - 1)) (1 + (\zeta(3) - 1)) \dots$$

und die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

ist konvergent, nämlich $= 1$. (Hieraus ergibt sich übrigens, daß $A_1 > 2$.) Wegen

$$\zeta\left(2 + \frac{k}{i}\right) \leq \zeta\left(2 + \left[\frac{k}{i}\right]\right)$$

wird aber das Produkt A_i — bis auf die ersten $i-1$ Faktoren — durch die i -te Potenz des Produktes A_1 majorisiert, also ist auch A_i konvergent.

Es ist bekannt, daß für $s > 1$

$$(11) \quad \zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right),$$

wo das unendliche Produkt sich auf alle Primzahlen erstreckt. Wir gewinnen daher

$$\begin{aligned} A_i &= \zeta\left(\frac{i+1}{i}\right) \zeta\left(\frac{i+2}{i}\right) \dots = \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{i+1}{i}}} + \frac{1}{p^{\frac{2(i+1)}{i}}} + \dots \right) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{i+2}{i}}} + \frac{1}{p^{\frac{2(i+2)}{i}}} + \dots \right) \dots \end{aligned}$$

Sämtliche Glieder des Produktes sind > 1 und das Produkt ist — wie wir es bewiesen haben — konvergent, die unendlichen Reihen mit positiven Gliedern in den einzelnen Faktoren ebenfalls; es ist daher erlaubt die Multiplikation gliedweise durchzuführen und die Teilprodukte beliebig zu ordnen.

Dann kommt das Glied $\frac{1}{n^{\frac{1}{i}}}$ so oft vor, als n sich in der Form

$$\begin{aligned} p_1^{\alpha_{11}(i+1) + \alpha_{12}(i+2) + \dots} p_2^{\alpha_{21}(i+1) + \alpha_{22}(i+2) + \dots} \dots = \\ = p_1^{\overbrace{i+1 + (i+1) + \dots + (i+2) + (i+2) + \dots}^{\alpha_{11}}} \dots p_2^{\overbrace{(i+2) + (i+2) + \dots}^{\alpha_{12}}} \dots p_3^{\overbrace{(i+1) + (i+1) + \dots}^{\alpha_{21}}} \dots \end{aligned}$$

darstellen läßt d. h. so oft, wie sich n in das Produkt von Primzahlpotenzen mit Exponenten $\geq i+1$ zerlegen läßt, d. h. $f_{i+1}(n)$ -mal. Damit haben wir (10) bewiesen.

Nun beweisen wir, daß

$$(12) \quad s_i(n) = \sum_{k=1}^n f_i(k) = O\left(\sqrt[i]{n}\right).$$

Es ist nämlich nach (9) und (10), da $f_i(l) \geq 0$

$$\sum_{k=1}^n f_i(k) \leq \sum_{l=1}^n f_{i+1}(l) \sqrt[i]{\frac{n}{l}} = \sqrt[i]{n} \sum_{l=1}^n \frac{f_{i+1}(l)}{\sqrt[l]{l}} \leq A_i \sqrt[i]{n},$$

woraus (12) unmittelbar folgt.

Wegen (12) gilt auch

$$\sum_{k=1}^n f_{i+1}(k) = O\left(\sqrt[i+1]{n}\right),$$

also können wir den Hilfssatz aus der Einleitung anwenden. Wir erhalten

$$(13) \quad s_i(n) = \sum_{k=1}^n f_i(k) = A_i \sqrt[i]{n} + O\left(\sqrt[i+1]{n}\right).$$

Für den Spezialfall $i=1$ lautet unser Resultat

$$\sum_{k=1}^n f(k) = A_1 n + O(\sqrt{n}),$$

wie in der Einleitung angekündigt.

§ 2. Verteilung der Zahlen k mit $f_i(k) \neq 0$.

Es ist unmittelbar klar, daß $f_i(k)$ — die Anzahl der Zerlegungen der Zahl k als Produkt solcher Primzahlpotenzen, deren Exponenten $\geq i$ sind — nur für solche Zahlen k von Null verschieden ist, in denen alle Primzahlen mit einem Exponenten $\geq i$ vorkommen. Diese Zahlen werden wir der Kürze halber „Zahlen i -ter Art“ nennen.

Nun wollen wir die Anzahl der Zahlen i -ter Art bis n asymptotisch auswerten. Bezeichnen wir ihre Anzahl mit $\psi_i(n)$.

Offenbar ist $\psi_i(n) \leq s_i(n)$, da $s_i(n) = \sum_{k=1}^n f_i(k)$ eine Summe nicht-negativer Zahlen ist, die $\psi_i(n)$ Glieder ≥ 1 besitzt. Daher ist nach (12)

$$(14) \quad \psi_i(n) = O\left(\sqrt[i]{n}\right).$$

Wir werden genauer zeigen, daß die asymptotische Formel

$$\psi_i(n) = C_i \sqrt[i]{n} + O\left(\sqrt[i+1]{n}\right)$$

gilt, wobei C_i eine von i , nicht aber von n , abhängige positive Zahl ist.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Zahlen, deren Primfaktorendarstellung jede Primzahl mit einem Exponenten enthält, der größer als i aber kleiner als $2i$ ist, mit

$$(15) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

(etwa in zunehmender Reihenfolge). Ist $\chi_i(n)$ die Anzahl der Glieder $\leq n$ der Folge (15), so ist $\chi_i(n) \leq \psi_{i+1}(n)$, da die Folge (15) lauter Zahlen $i+1$ -ter Art enthält. Daher ist nach (14)

$$(16) \quad \chi_i(n) = O\left(\sqrt[i+1]{n}\right).$$

Nun läßt sich jede Zahl i -ter Art auf eine und nur eine Weise in zwei solche Faktoren zerlegen, deren erster eine i -te

Potenzzahl ist, der zweite hingegen der Folge (15) gehört. In der Tat, ist

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \geq i)$$

eine beliebige Zahl i -ter Art, so läßt sich jeder Exponent α_j eindeutig in der Form $\alpha_j = \beta_j i + \gamma_j$ mit $\beta_j \geq 0$, $\gamma_j = 0$ oder $i < \gamma_j < 2i$, darstellen und dann ist offenbar

$$k = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r})^i \cdot p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}$$

die einzige Zerlegung der gewünschten Form. Natürlich ist auch umgekehrt das Produkt einer i -ten Potenzzahl mit einer Zahl (15) eine Zahl i -ter Art.

Daher ist

$$(17) \quad \psi_i(n) = \sum_{m^i a_j \leq n} 1 = \sum_{a_j \leq n} \sum_{\substack{i \\ m \leq \sqrt[i]{\frac{n}{a_j}}}} 1 = \sum_{a_j \leq n} \left[\sqrt[i]{\frac{n}{a_j}} \right],$$

wobei a_j die Glieder der Folge (15) durchläuft.

Infolge (16) und (17) können wir den Hilfssatz aus der Einleitung auf $\psi_i(n)$ anwenden; es ist dabei $\omega(n) = 1$ oder 0 zu setzen, je nachdem n der Folge (15) angehört oder nicht. Wir erhalten

$$\psi_i(n) = C_i \sqrt[i]{n} + O\left(\sqrt[i+1]{n}\right),$$

wobei

$$C_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[i]{a_j}} > 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 6. Juni 1934.)