Le théorème de probabilité de Poincaré, généralisé au cas de plusieurs variables indépendantes.

Par CH. JORDAN à Budapest.

1. La définition de la Probabilité Mathématique est basée sur la théorie des ensembles.[1]) Résumons les notions de cette discipline. Nous désignerons un ensemble par une ou par plusieurs lettres par exemple: E, AB, $A\beta$, etc. Le nombre des éléments appartenant à un ensemble, supposé fini, sera noté par les mêmes lettres que l'ensemble correspondant, mais mise en parenthèse; exemples: (E), (AB), $(A\beta)$.

Le signe $=$ signifiera identité. $E=A$ veut dire que l'ensemble E est identique à l'ensemble A, c.-à-d. possède les mêmes éléments.

On définit, par le produit AB de deux ensembles A et B, l'ensemble formé par les éléments communs aux deux ensembles. Comme l'ensemble zéro est un ensemble qui n'a point d'éléments, l'égalité $AB=0$ signifie que l'ensemble AB, étant identique à l'ensemble zéro, n'a pas d'éléments: c.-à-d. que les ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs. $AB=A$ signifie que les éléments communs aux ensembles A et B sont identiques aux éléments de l'ensemble A; c.-à-d. que tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B.

On définit par la somme $A+B$ de deux ensembles A et B l'ensemble formé par les éléments des deux ensembles réunis.

---

[1]) CH. JORDAN, *a) Statistique Mathématique* (Paris, 1927); *b)* A valószínűségszámítás alapfogalmai (Les fondements du Calcul des probabilités), *Mathematikai és Physikai Lapok,* 34 (1927), p. 101—136; *c)* Inversione della formula di Bernoulli relativa al problema delle prove ripetute a più variabili, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Roma,* 4 (1933), p. 505—513.

$A+B=C$ veut dire que chaque élément de l'ensemble A ou de l'ensemble B appartient aussi à l'ensemble C. De plus qu'un élément de C appartient ou à l'ensemble A ou à B, ou encore à ces deux ensembles.

2. *Classement dichotome.* Dans ce classement, l'ensemble E est partagé en deux classes A et α de manière qu'il n'y ait pas d'éléments communs aux deux ensembles A et α. Donc d'après ce qui précède on a

$$A+\alpha=E \quad \text{et} \quad A\alpha=0.$$

On peut partager l'ensemble E en deux classes de différentes manieres :

$$E=A_1+\alpha_1=A_2+\alpha_2=\ldots=A_n+\alpha_n$$

tout en ayant

$$A_1\alpha_1=0,\ A_2\alpha_2=0,\ldots,A_n\alpha_n=0.$$

Ces classements sont des classements dichotomes de premier ordre.

On peut définir la probabilité de deux ensembles A et B par une fraction dont le numérateur est égal au nombre des éléments du produit des deux ensembles et le dénominateur au nombre des éléments de la somme des deux ensembles :

$$P=\frac{(AB)}{(A+B)}.$$

Cette définition est un peu plus générale que celle employée ordinairement où l'on suppose que les éléments de l'ensemble B appartiennent tous à l'ensemble A c.-à-d. que l'on a

$$AB=B \quad \text{et} \quad A+B=A.$$

Dans ce cas on peut interpréter un problème de probabilité en définissant l'ensemble A de maniere que ces éléments soient : les cas, considérés comme également possibles; et les éléments de B: les cas favorables à un événement déterminé. La probabilité de l'événement sera alors $P=(B)/(A)$

On obtient un classement dichotome du second ordre lorsque l'on partage l'ensemble E simultanément en $A_1+\alpha_1$ et en $A_2+\alpha_2$; on obtient alors quatre classes :

$$E=A_1A_2+A_1\alpha_2+\alpha_1A_2+\alpha_1\alpha_2.$$

Cette décomposition peut être représentée par la multiplication symbolique :

$$(A_1+\alpha_1)(A_2+\alpha_2)=EE=E$$

en effet la partie commune aux ensembles E et E est E (De même on aurait $E^m = E$.)

D'une manière semblable on obtient un classement dichotome d'ordre n en partant de

$$(A_1 + \alpha_1)(A_2 + \alpha_2) \dots (A_n + \alpha_n) = E$$

et en effectuant les multiplications. On a, comme il a était dit $A_i \alpha_i = 0$.

Dans la théorie des classes on a été amené à appeler classes positives celles dont le symbole ne contient que des lettres latines, et de nommer les autres classes négatives. On peut exprimer les classes négatives par les classes positives en résolvant des équations du premier degré; mais on arrive plus rapidement au résultat par le procédé *symbolique* suivant: on remplace les α_i par $E - A_i$, on effectue les multiplications, puis on remplace dans le résultat, conformément à ce qui précède, E^ν par E, et $E^\nu A_i$ par A_i. Par exemple

$$\alpha_1 \alpha_2 = (E - A_1)(E - A_2) = E - A_1 - A_2 + A_1 A_2$$

de cette équation symbolique on déduit

$$(\alpha_1 \alpha_2) = (E) - (A_1) - (A_2) + (A_1 A_2).$$

Comme il a était dit, ce résultat pourrait être vérifié à l'aide des équations

$$(A_1 A_2) + (A_1 \alpha_2) + (\alpha_1 A_2) + (\alpha_1 \alpha_2) = (E)$$

$$(A_1 A_2) + (A_1 \alpha_2) = (A_1); \quad (A_1 A_2) + (\alpha_1 A_2) = (A_2).$$

Dans un classement dichotome d'ordre n, la somme des classes dans lesquelles il y a m symboles positifs et $n - m$ négatifs est

$$\sum A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \dots A_{i_m} \alpha_{i_{m+1}} \dots \alpha_{i_n}; \tag{1}$$

dans cette somme, les indices $i_1, i_2, \dots, i_m$ prennent les valeurs correspondant à toutes les combinaison m à m des nombres $1, 2, \dots, n$ et $i_{m+1}, \dots, i_n$ représente la combinaison complémentaire.

3. *Probabilité des épreuves répétées.* On peut interpréter la probabilité des épreuves répétées de la manière suivante: soit E l'ensemble des cas également possibles; de plus, soient A_i l'ensemble des cas favorables à l'événement $\mathfrak{E}$ qui peuvent se présenter à l'épreuve i et α_i l'ensemble des cas défavorables à l'événement $\mathfrak{E}$ à l'épreuve i.

On en conclut que la somme (1) représente l'ensemble des suites de n épreuves dans lesquelles il y a m épreuves favorables et $n-m$ épreuves défavorables.

Par suite la probabilité pour avoir m épreuves favorables et $n-m$ épreuves défavorables en n épreuves sera

$$P=\sum \frac{(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_m}\alpha_{i_{m+1}}\ldots \alpha_{i_n})}{(E)}$$

où (E) est le nombre des suites possibles en n épreuves.

Cette formule est tout à fait générale. En employant la méthode symbolique précédente pour exprimer la somme qui figure dans la probabilité précédente par des sommes de classes positives, on trouve

$$A_{i_1}\ldots A_{i_m}(E-A_{i_{m+1}})\ldots(E-A_{i_n});$$

après avoir effectué les multiplications, on simplifie en écrivant

$$A_{i_1}\ldots A_{i_m}E^{n-m}=A_{i_1}\ldots A_{i_m}$$

ensuite

$$-\sum A_{i_1}\ldots A_{i_m}\sum_{\nu=m+1}^{n} A_{i_\nu}=-\binom{m+1}{m}\sum A_{i_1}\ldots A_{i_{m+1}}$$

en effet dans la somme du premier membre chaque terme arrive $\binom{m+1}{m}$ fois. On a encore

$$\sum A_{i_1}\ldots A_{i_m}\sum A_{i_\nu}A_{i_{\nu+1}}=\binom{m+2}{m}\sum A_{i_1}\ldots A_{i_{m+2}}$$

car dans la somme du premier membre chaque terme arrive $\binom{m+2}{m}$ fois. Finalement on trouve

$$\begin{aligned}P=\sum \frac{(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_m})}{(E)}-\binom{m+1}{m}\sum\frac{(A_{i_1}\ldots A_{i_{m+1}})}{(E)}+\ldots+\\ +(-1)^{\nu}\binom{m+\nu}{m}\sum\frac{(A_{i_1}\ldots A_{i_{m+\nu}})}{(E)}+\ldots+ \quad (2)\\ +(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\frac{(A\;A_2\ldots A_n)}{(E)}.\end{aligned}$$

La première somme est la probabilité pour qu'en n épreuves il y ait m cas favorables (les autres étant favorables ou non). La seconde somme est la probabilité pour que $m+1$ cas soient favorables (les autres quelconques), et ainsi de suite; le dernier terme est la probabilité pour que tous les n cas soient favorables.

Ce théoreme très général de probabilité des épreuves répétées embrasse les théorèmes de BERNOULLI, de POISSON et de POINCARÉ [loc. cit. [1]) *b)*, p. 118].

La formule (2) se simplifie considérablement lorsque la probabilité de l'événement $\mathfrak{A}$ à l'épreuve i est indépendante du résultat des épreuves antérieures. Alors elle est égale à la probabilité de $\mathfrak{A}$ lorsque la première épreuve était favorable, puis égale à cette probabilité lorsque les deux premières épreuves étaient favorables et ainsi de suite. C.-à-d.

$$\frac{(A_i)}{(E)} = \frac{(A_i A_1)}{(A_1)} = \frac{(A_i A_1 A_2)}{(A_1 A_2)} = \dots \tag{3}$$

Lorsque la formule (3) est vraie pour toutes les valeurs de i, on tire de cette formule successivement

$$(A_i A_1) = (A_i)\,(A_1)/(E)$$
$$(A_i A_1 A_2) = (A_i)\,(A_1)\,(A_2)/(E)\,(E)$$

et ainsi de suite.[2])

A l'aide de ces valeurs la formule (2) devient

$$\begin{aligned} P = \sum \frac{(A_{i_1})}{(E)} \cdot \frac{(A_{i_2})}{(E)} \cdots \frac{(A_{i_m})}{(E)} - \\ - \binom{m+1}{m} \sum \frac{(A_{i_1})}{(E)} \cdots \frac{(A_{i_{m+1}})}{(E)} + \dots + \\ + (-1)^{\nu} \binom{m+\nu}{m} \sum \frac{(A_{i_1})}{(E)} \cdots \frac{(A_{i_{m+\nu}})}{(E)} + \dots + \\ + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \frac{(A_1)}{(E)} \cdots \frac{(A_n)}{(E)} . \end{aligned} \tag{4}$$

Cas particulier. Lorsque les probabilités

$$\frac{(A_i)}{(E)}$$

ont toutes la même valeur p, c.-à-d. indépendantes de i, la probabilité devient constante à chaque épreuve et la formule (4) devient identique à la formule de BERNOULLI

$$\begin{aligned} P = \binom{n}{m} p^m - \binom{n}{m+1} \binom{m+1}{m} p^{m-1} + \binom{n}{m+2} \binom{m+2}{m} p^{m-2} - \dots \\ \dots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} p^n = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} . \end{aligned} \tag{5}$$

---

[2]) La condition d'indépendence donnée par E. CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Leipzig, 1924), Band I, p. 48, est insuffisante pour déduire les formules suivantes.

4. *Formule de Poincaré.* En posant dans (4) $m=0$ on obtient la probabilité pour que les n épreuves soient toutes défavorables. En retranchant cette probabilité de l'unité, on obtient la probabilité pour qu'en n épreuves au moins une épreuve soit favorable. C'est la formule de POINCARÉ

$$P=\sum\frac{(A_i)}{(E)}-\sum\frac{(A_{i_1}A_{i_2})}{(E)}+\sum\frac{(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3})}{(E)}-\ldots \tag{6}$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(A_1A_2A_3\ldots A_n)}{(E)}.$$

Lorsqu'en plus la probabilité pour que l'événement soit favorable est la même à chaque épreuve $\frac{(A_i)}{(E)}=p$, la formule (3) se réduit à

$$P=np-\binom{n}{2}p^2+\binom{n}{3}p^3-\ldots+(-1)^{n+1}p^n=1-(1-p)^n.$$

5. *Classement polytome.* Dans ces classement, l'ensemble E est partagé en plusieurs classes, sans éléments commun deux à deux:

$$E=A_{i1}+A_{i2}+\ldots+A_{im} \quad \text{avec} \quad A_{i\nu}A_{i\mu}=0 \quad \text{pour} \quad \nu\neq\mu$$

pour $i=1,2,\ldots,m$.

Ce classement peut servir pour interpréter la probabilité des épreuves répétées à plusieurs variables indépendantes. Supposons par exemple qu'à chaque épreuve un des événements $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\ldots,\mathfrak{A}_m$ puisse arriver et un seul. L'ensemble E est celui de tous les cas possibles. L'ensemble $A_{\nu i}$ est l'ensemble des cas favorables à l'arrivée de l'événement $\mathfrak{A}_\nu$ à l'épreuve i.

Nous allons supposer dans ce qui suit que la probabilité de l'événement $\mathfrak{A}_\nu$ est la même à chaque épreuve

$$\frac{(A_{i\nu})}{(E)}=p_\nu$$

alors la probabilité pour que chaque événement $\mathfrak{A}_\nu$ arrive r_ν fois en n épreuves $(\nu=1,2,\ldots,m)$ est donnée par la formule de BERNOULLI à $m-1$ variables indépendantes:[3])

$$P=\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_m!}p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ldots p_m^{r_m}. \tag{7}$$

6. *Le théorème de Poincaré généralisé.* Nous allons généraliser la formule de POINCARÉ en déterminant la probabilité pour

[3]) CH. JORDAN, Problema della prove ripetute a piu variabili indipendenti, *Giornale dell'Istituto degli Attuari, Roma,* **4** (1933), p. 351–368.

que dans une suite de n épreuves tous les événements $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m$ se présentent au moins une fois, en supposant que la probabilité de l'arrivée de l'événement $\mathcal{A}_\nu$ est égale à p_ν à chaque épreuve.

Pour obtenir cette probabilité nous allons retrancher de l'unité la probabilité des suites dans lesquelles au moins un de ces événements ne se présente pas. Pour y arriver retranchons d'abord

$$(8) \qquad \sum_{\nu=1}^{m} (1-p_\nu)^n$$

c.-à-d. la somme des probabilités des suites dans lesquelles l'événement $\mathcal{A}_\nu$ ne se présente pas, (pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots, m$).

Mais en procèdant de cette manière, nous avons retranché deux fois la probabilité correspondant aux suites dans lesquelles deux des événements ne se sont pas produits; il faut donc rajouter une fois la probabilité correspondant à ces suites, donc

$$(9) \qquad \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2})^n$$

cette somme étant étendue à toutes les combinaisons des événements deux à deux.

En retranchant (8), on a rentranché $\binom{3}{1}$ fois la probabilité des suites dans lesquelles trois des événements ne se sont pas produits, puis en rajoutant (9), on a rajouté cette probabilité $\binom{3}{2}$ fois. Il faut donc retrancher encore une fois la probabilité

$$(10) \qquad \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2}-p_{\nu_3})^n$$

et ainsi de suite.

Enfin la probabilité des suites dans lesquelles i des événement ne se produisent pas, est rajouté $(-1)^i$ fois. En effet cette probabilité ayant été ajoutée

$$-\binom{i}{1}+\binom{i}{2}-\binom{i}{3}+\ldots+(-1)^{i-1}\binom{i}{i-1}$$

fois, il faut l'ajouter encore $(-1)^i$ fois pour qu'elle soit en fin de compte retranchée une fois.

On obtient finalement la probabilité cherchée

$$(11) \qquad \begin{aligned} P = 1 &- \sum (1-p_{\nu_1})^n + \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2})^n - \\ &- \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2}-p_{\nu_3})^n + \ldots + \\ &+ (-1)^m \sum (1-p_{\nu_1}-p_{\nu_2}-\ldots-p_{\nu_m})^n. \end{aligned}$$

C'est le théorème de POINCARÉ, généralisé pour le cas des épreuves répétés à $m-1$ variables indépendantes, donnant la probabilité pour qu'en n épreuves chaque événement se produise au moins une fois, la probabilité p_ν de l'événement $\mathfrak{A}_\nu$ restant la même à chaque épreuve.

Cas particulier. Lorsque les probabilités p_ν sont toutes égales, on a $p_\nu = 1/m$ car $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$; et il en résulte

$$P = 1 - \binom{m}{1}\left(1-\frac{1}{m}\right)^n + \binom{m}{2}\left(1-\frac{2}{m}\right)^n - \ldots + \\ +(-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\left(1-\frac{m-1}{m}\right)^n$$

ou encore

$$P = \frac{1}{m^n}\sum_{x=1}^{m}(-1)^{m-x}\binom{m}{x}x^n.$$

Dans le Calcul des différences finies, on montre que la somme du second membre est égale à la différence m-ième de x^n pour $x=0$. De plus on y dénote

$$\left[\frac{\Delta^m x^n}{m!}\right]_{x=0} = \mathfrak{S}_n^m$$

où $\mathfrak{S}_n^m$ est nommé nombre de STIRLING de second expèce,[4]) on a donc

$$P = \frac{m!}{m^n}\mathfrak{S}_n^m. \tag{12}$$

On peut obtenir ce résultat en partant de la formule (7) en y posant $p_\nu = \dfrac{1}{m}$. On trouve

$$P = \frac{1}{m^n}\sum \frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_m!}.$$

La somme du second membre doit être étendue à toutes les valeurs $r_i = 1, 2, 3, \ldots,$ telles que $r_1+r_2+\ldots+r_m=n$. Mais on sait que dans ce cas cette somme est égale à $m!\,\mathfrak{S}_n^m$. [Voir loc. cit. [4]), p. 268.] On obtient donc la formule (12).

Lorsqu'à chaque épreuve m événements différents peuvent se produire avec la même probabilité $\left(\dfrac{1}{m}\right)$, alors la probabilité

---

[4]) C. JORDAN, On Stirling's Numbers, *Tôhoku Mathematical Journal,* **37** (1933), p. 254—278.

pour qu'en n épreuves chaque événement se produise au moins une fois est donnée par

$$P = \frac{m!}{m^n} \mathfrak{S}_n^m .$$

De la même manière on déduit de (7) lorsque $p_\nu = {}^1/_m$, la probabilité qu'en n épreuves des m événements, μ quelconques se produisent seulement; elle est égale à

$$P_\mu = \binom{m}{\mu} \frac{1}{m^n} \sum \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_\mu!} = \binom{m}{\mu} \frac{\mu!}{m^n} \mathfrak{S}_n^\mu =$$
$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{m^n} \mathfrak{S}_n^\mu .$$

La somme du premier membre étant étendue aux valeurs $r_i = 1, 2, 3, \ldots$ telle que $r_1 + r_2 + \ldots + r_\mu = n$

(Reçu le 4 séptembre 1934.)