# Über einen Löwenheimschen Satz.

Von László Kalmár in Szeged.

Löwenheim[1]) hat eine Konstruktion angegeben, welche jedem Zählausdruck[2]) $\mathfrak{A}$ einen binären[3]) Zählausdruck $\mathfrak{B}$ zuordnet derart, daß $\mathfrak{A}$ *dann und nur dann allgemeingültig ist, falls* $\mathfrak{B}$ *es ist.* In den folgenden Zeilen wird diese Konstruktion durch eine einfachere ersetzt.

**1.** Es seien $F_1, F_2, \ldots, F_l$ die im gegebenen Zählausdruck $\mathfrak{A}$ figurierenden Funktionsvariable; $F_\lambda$ soll $r_\lambda$ Leerstellen besitzen[4]) $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$. Es sei $r = \mathrm{Max}(r_1, r_2, \ldots, r_l)$. Wählen wir $l$ Funktionsvariable $G_1, G_2, \ldots, G_l$ mit einer und $r$ Funktionsvariable $H_1, H_2, \ldots, H_r$ mit zwei Leerstellen, die voneinander und von $F_1, F_2, \ldots, F_l$ verschieden sind, ferner eine von den in $\mathfrak{A}$ vorkommenden gebundenen Variablen verschiedene Individuenvariable $u$.

Der gesuchte binäre Zählausdruck $\mathfrak{B}$ entsteht aus $\mathfrak{A}$, indem man für die Funktionszeichen $F_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{r_\lambda})$ die Formel

$$(1) \qquad (u)\big(H_1(x_1, u) \,\&\, H_2(x_2, u) \,\&\, \ldots \,\&\, H_{r_\lambda}(x_{r_\lambda}, u) \rightarrow G_\lambda(u)\big)$$

[1]) L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen,* **76** (1915), S. 447—470, insb. § 4. Ich setze weder die Kenntnis dieser Arbeit, noch die der dort angewandten Schröderschen Symbolik voraus; statt den letzteren wende ich die Bezeichnungen des Werkes: D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928) an.

[2]) d. h. Formel des engeren Funktionenkalküls ohne freie Individuenvariable.

[3]) d. h. einen solchen, die ausschließlich Funktionsvariable mit einer und zwei Leerstellen enthält.

[4]) Durch eine einfache vorbereitende Konstruktion könnte man übrigens erreichen, daß $r_1 = r_2 = \ldots = r_l$; die obige Konstruktion würde aber dadurch nicht einfacher ausfallen.

einsetzt[5]) ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$). Es ist klar, daß $\mathfrak{B}$ allgemeingültig ist, falls $\mathfrak{A}$ es ist; unsere Aufgabe ist, auch das *Umgekehrte* zu zeigen.

**2.** Setzen wir also voraus, daß $\mathfrak{B}$ allgemeingültig ist. Es sei $\mathfrak{J}$ ein beliebiger Individuenbereich, ferner $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$ beliebige in $\mathfrak{J}$ definierte logische Funktionen von bzw. $r_1, r_2, \ldots, r_l$ Argumenten. Es ist zu zeigen, daß die Aussage $\mathfrak{A}^*$, die aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung dieser Funktionen für $F_1, F_2, \ldots, F_l$ entsteht, richtig ist.

Wir bezeichnen durch $\mathfrak{J}^r$ die Menge der geordneten $r$-tupel aus Elementen von $\mathfrak{J}$. Die Komponenten der Elemente von $\mathfrak{J}^r$ bezeichnen wir durch dieselben Buchstaben wie diese Elemente, aber mit oberen Indizes; z. B. sind die Komponenten von $\alpha$ der Reihe nach $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(r)}$.

Wir definieren in $\mathfrak{J}^r$ die logischen Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_l$ von einem Argument und $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$ von zwei Argumenten wie folgt: $\Psi_\lambda(\alpha)$ sei für $\alpha \in \mathfrak{J}^r$ gleichbedeutend mit $\Phi_\lambda(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(r_\lambda)})$; $\Omega_\varrho(\alpha, \beta)$ bedeutet für $\alpha, \beta \in \mathfrak{J}^r$, daß $\alpha^{(1)}$ mit $\beta^{(\varrho)}$ identisch ist ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$; $\varrho = 1, 2, \ldots, r$).

Wegen Voraussetzung entsteht eine richtige Aussage $\mathfrak{B}^*$, falls in $\mathfrak{B}$ für $G_1, G_2, \ldots, G_l$, $H_1, H_2, \ldots, H_r$ der Reihe nach die Funktionen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_l$, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$ eingesetzt und die Klammerzeichen über $\mathfrak{J}^r$ erstreckt werden. Aus der Teilformel (1) wird dann insbesondere

$$(2) \qquad (u)\big(\Omega_1(x_1, u) \mathbin{\&} \Omega_2(x_2, u) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \Omega_{r_\lambda}(x_{r_\lambda}, u) \rightarrow \Psi_\lambda(u)\big).$$

Die Aussage $\mathfrak{B}^*$ läßt sich aber auch mit sich über $\mathfrak{J}$ erstreckenden Klammerzeichen ausdrücken. Man braucht nur die

---

[5]) Statt dessen könnte man auch

$$(1') \qquad (Eu)\big(H_1(x_1, u) \mathbin{\&} H_2(x_2, u) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} H_{r_\lambda}(x_{r_\lambda}, u) \mathbin{\&} G_\lambda(u)\big)$$

für $F_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{r_\lambda})$ einsetzen. Ein formal ähnlicher Ansatz wird bei K. Gödel, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **40** (1933), S. 433—443, insb. Formel (20), S. 441, angewandt, um zu verhindern, daß ein gewisses Skolemsches Verfahren den binären Charakter eines Zählausdruckes zerstört. [Mit Hilfe dieses Gödelschen Kunstgriffes könnte man den Teil II meiner Arbeit: Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, *diese Acta*, **5** (1930—32), S. 222—236, gewisse technische Vereinfachungen anbringen; vgl. Fußnote [19]) jener Arbeit, die durch die Gödelsche Bemerkung gegenstandlos wurde.] Den Gödelschen Ansatz könnte man ebenfalls zum Beweis des Löwenheimschen Satzes verwerten; die sich so ergebende Konstruktion wäre aber komplizierter, als die des Textes, da sie im allgemeinen mehr (nämlich $r_1 + r_2 + \ldots + r_l$ statt $r + l$) Hilfsfunktionen benützt und auch zum Beweis einer Ungleichung wie (4) weniger geeignet ist.

darin vorkommenden logischen Funktionen durch die Komponenten ihrer Argumente auszudrücken, ferner die Allzeichen $(x)$ und die Seinzeichen $(Ex)$ durch den entsprechenden Zeichen $(x^{(1)})(x^{(2)})\dots(x^{(r)})$ bzw. $(Ex^{(1)})(Ex^{(2)})\dots(Ex^{(r)})$ für die Komponenten zu ersetzen. Insbesondere geht dann (2) in die Aussagenfunktion

$$(3)\quad (u^{(1)})(u^{(2)})\dots(u^{(r)})\big(\Delta(x_1^{(1)}, u^{(1)}) \,\&\, \Delta(x_2^{(1)}, u^{(2)}) \,\&\dots\&\, \Delta(x_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \to \Phi_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r_\lambda)})\big)$$

über, wobei $\Delta(x, y)$ die Identitätsfunktion des Individuenbereiches $\mathfrak{J}$ bedeutet, d. h. die logische Funktion, die dann und nur dann richtig ist, falls für $x$ und $y$ ein und dasselbe Element von $\mathfrak{J}$ eingesetzt wird.

In dieser Schreibweise kommen außer $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r)}$ nur solche Individuenvariable in $\mathfrak{B}^*$ als Argumente einer Funktion vor, die den oberen Index $^{(1)}$ tragen; die Klammerzeichen mit den übrigen Variablen können also wieder weggelassen werden. Ersetzt man noch die Aussagenfunktion (3) durch die offenbar gleichwertigen Funktionen $\Phi_\lambda(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{r_\lambda}^{(1)})$, so entsteht eine Aussage, die sich von $\mathfrak{A}^*$ nur in der Bezeichnung der (gebundenen) Individuenvariablen unterscheidet. Daher ist auch $\mathfrak{A}^*$ richtig, wie behauptet.

**3.** Ein Zählausdruck $\mathfrak{A}$ kann, ohne allgemeingültig zu sein, in *gewissen* Individuenbereichen identisch (d. h. für jede Einsetzung von logischen Funktionen für die Funktionsvariablen) richtig ausfallen. In diesem Falle fragt man, welche Individuenbereiche diese Beschaffenheit haben. Um dies zu entscheiden, genügt es bekanntlich[6]) die Mindestenzahl $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}$ der Elemente derjenigen Individuenbereiche zu bestimmen, in denen $\mathfrak{A}$ nicht mehr identisch richtig ist; dann ist $\mathfrak{A}$ dann und nur dann in einem Individuenbereich identisch richtig, falls derselbe eine Kardinalzahl kleiner als $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}$ besitzt.

Aus dem obigen Beweis ergibt sich nun die Ungleichung

$$(4)\qquad \mathfrak{m}_{\mathfrak{A}} \leq \mathfrak{m}_{\mathfrak{B}} \leq \mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}^{r}.$$

*Kennt man also* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}}$, *so kann man auch* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}$ *bestimmen.* Ist $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}}$ endlich, so folgt dies daraus, daß man in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob ein gegebener Zählausdruck in einem Individuen-

---

[6]) Siehe P. Bernays und M. Schönfinkel, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, **99** (1928), S. 342—372, insb. S. 344.

bereich mit einem gegebenen endlichen Anzahl von Elementen identisch richtig ist; ist aber $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}}$ unendlich, so ist nach dem bekannten Löwenheim—Skolemschen Satz[7]) $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}} = \aleph_0$, also, wegen (4), auch $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}} = \aleph_0$.

**4.** Die obige Konstruktion besitzt, gegenüber der Löwenheimschen Konstruktion, auch die Beschaffenheit, *daß* $\mathfrak{A}$ *dann und nur dann erfüllbar ist, falls* $\mathfrak{B}$ *es ist.* Dies folgt aus der Bemerkung, daß unsere Konstruktion der Negation von $\mathfrak{A}$ die Negation von $\mathfrak{B}$ zuordnet.

*(Eingegangen am 12. März 1934.)*

## Zusatz.[8])

Die oben — vom Standpunkt der *mengentheoretischen Prädikatenlogik*[9]) aus dargelegte — Beweisverfahren besitzt dem Löwenheimschen gegenüber auch den Vorzug, daß es sich fast unmittelbar der *axiomatischen Prädikatenlogik* anpassen läßt. So gewinnt man den folgenden *finiten* Beweis des Löwenheimschen Satzes, der mit wesentlich einfacheren Hilfsmitteln auskommt, als der von HERBRAND[10]) stammende finite Beweis dieses Satzes.[11])

---

7) L. LÖWENHEIM, a. a. O., Satz 2; TH. SKOLEM, Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, Mat.-Naturv. Klasse,* 1929, No. 4, 49 S., insb. § 4.

8) In diesem Zusatz wird den Prädikatenlogik betreffenden Ideen des neulich erschienenen Werkes: D. HILBERT und P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik,* I (Berlin, 1934) Rechnung getragen. In Terminologie und Bezeichnungen schließen wir uns von nun an diesem Werk (zitiert: H.—B.) an; nur sollen $l, r, s, \lambda, \varrho$ (mit oder ohne Indizes), wie bisher, Ziffer bedeuten. $p, q$ (auch mit beliebigen Indizes) sollen freie Individuenvariable (besonders für Festlegung von Nennformen), $u$ (ebenfalls mit oder ohne Indizes) eine gebundene Individuenvariable bedeuten.

9) Vgl. H.—B., S. 125.

10) J. HERBRAND, Sur le problème fondamental de la logique mathématique, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydz. III,* **24** (1931), S. 12—56, insb. S. 34—39.

11) Aus dem folgenden Beweis der finiten Formulierung des Löwenheimschen Satzes kann man mit Hilfe des Gödelschen Vollständigkeitssatzes (K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.,* **37** (1930), S. 349—360, insb. Satz I, S. 350) wiederum zu einem Beweis des Löwenheimschen Satzes in der mengentheoretischen Formulierung gelangen; dieser Beweis wäre aber komplizierter, als der oben gegebene Beweis.

**5.** In der axiomatischen Prädikatenlogik wird die Rolle der Allgemeingültigkeit einer Formel durch die *Ableitbarkeit* derselben im Axiomensystem des Prädikatenkalkuls übernommen.[12]) Wir haben also zu beweisen, daß eine, keine freien Individuenvariable enthaltende, Formel $\mathfrak{A}$ des Prädikatenkalkuls dann und nur dann ableitbar ist, falls die aus $\mathfrak{A}$ durch die in **1** angegebene Konstruktion entstehende Formel $\mathfrak{B}$ es ist. Daß aus der Ableitbarkeit von $\mathfrak{A}$ die von $\mathfrak{B}$ folgt, ergibt sich ohne weiteres aus der Regel der Einsetzung für die Formel-Variablen. Um das Umgekehrte zu zeigen, benötigen wir die folgende Formeltransformation. Es sei $s > 1$ eine natürliche Zahl; wir ordnen jeder freien oder gebundenen Individuenvariablen $s$ voneinander verschiedene freie bzw. gebundene Individuenvariable zu; auch je zwei Individuenvariable, die verschiedenen Individuenvariablen zugeordnet werden, sollen verschieden sein. Wir nennen die einer Individuenvariablen zugeordneten Variablen ihre *Komponenten* und bezeichnen sie mit angehängten oberen Indizes $^{(1)}, {}^{(2)}, \ldots, {}^{(s)}$. Dann verstehen wir unter die *s-Transformierte* einer Formel $\mathfrak{F}$ die Formel $\mathfrak{F}^{(s)}$, die wir erhalten, indem wir jede Individuenvariable sowohl in den Leerstellen der Funktionsvariablen, wie auch in den Klammerzeichen durch die Folge ihrer Komponenten ersetzen.[13]) (Die Funktionsvariable gehen dabei in gleichbezeichnete, aber durch die Anzahl der Leerstellen — die $s$-mal größer wird — unterschiedene[14]) Funktionsvariable über.)

**6.** Wir beweisen nun den

H i l f s s a t z. *Ist $\mathfrak{F}$ eine ableitbare Formel, so ist auch ihre s-Transformierte $\mathfrak{F}^{(s)}$ für jedes s ableitbar.*

B e w e i s Nach Definition der ableitbaren Formel genügt es die Behauptung zunächst für den Fall zu verifizieren, daß $\mathfrak{F}$ eine

---

[12]) Vgl. H.—B., S. 105—106. Unter „Formel“ verstehen wir Formel des Prädikatenkalkuls, ev. mit Hinzunahme des Prädikatensymbols $\Delta$ der Identität; Ableitbarkeit heißt, falls nicht anderes gesagt wird, Ableitbarkeit im Axiomensystem des Prädikatenkalkuls.

[13]) Z. B. wird aus $F(a, x, y)$ die Formel:

$$F(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)});$$

aus den Klammerzeichen $(x)$ und $(Ey)$ bzw. $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)})$ und $(Ey^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(s)})$. Letztere gelten als Abkürzungen für $(x^{(1)})(x^{(2)})\ldots(x^{(s)})$ und $(Ey^{(1)})(Ey^{(2)})\ldots(Ey^{(s)})$ und sollen durch diese ersetzt werden.

[14]) Vgl. H.—B., S. 89.

identische Formel des Aussagenkalkuls oder eine der beiden Ausgangsformeln

(a) $$(x)\,A(x) \to A(a),$$

(b) $$A(a) \to (Ex)\,A(x)$$

des Prädikatenkalkuls bezeichnet; dann, vorausgesetzt, daß die Behauptung für gewisse Formeln $\mathfrak{F}$ bereits bewiesen ist, zu zeigen, daß sie auch für die Formeln gilt, die aus jenen durch Einsetzung, oder durch Umbenennung[15]), oder durch Anwendung einer der Schemata

(*) $$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{P}\\ \mathfrak{P} \to \mathfrak{Q}\end{array}}{\mathfrak{Q}},$$

($\alpha$) $$\frac{\mathfrak{P} \to \mathfrak{Q}(a)}{\mathfrak{P} \to (x)\,\mathfrak{Q}(x)},$$

($\beta$) $$\frac{\mathfrak{Q}(a) \to \mathfrak{P}}{(Ex)\,\mathfrak{Q}(x) \to \mathfrak{P}}$$

entstehen.[16])

Ist $\mathfrak{F}$ eine identische Formel des Aussagenkalkuls, so enthält $\mathfrak{F}$ keine Individuenvariable, also ist $\mathfrak{F}^{(s)}$ dieselbe Formel wie $\mathfrak{F}$. Bezeichnet $\mathfrak{F}$ die Formel (a), so ist $\mathfrak{F}^{(s)}$ die Formel

$$(x^{(1)})\,(x^{(2)}) \ldots (x^{(s)})\,A(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}) \to A(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)}),$$

die sich aus den, aus (a) durch Einsetzung und Umbenennung entstehenden, Formeln

$$\begin{gathered}(x^{(1)})\,(x^{(2)}) \ldots (x^{(s)})\,A(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}) \to \\ \to (x^{(2)})\,(x^{(3)}) \ldots (x^{(s)})\,A(a^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(s)}),\\ (x^{(2)}) \ldots (x^{(s)})\,A(a^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}) \to (x^{(3)}) \ldots (x^{(s)})\,A(a^{(1)}, a^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(s)}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x^{(s)})\,A(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s-1)}, a^{(s)}) \to \quad A(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \ldots, a^{(s)})\end{gathered}$$

durch Kettenschluß entsteht. Bezeichnet $\mathfrak{F}$ die Formel (b), so ist $\mathfrak{F}^{(s)}$ die Formel

$$A(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)}) \to (Ex^{(1)})\,(Ex^{(2)}) \ldots (Ex^{(s)})\,A(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}),$$

die man in analoger Weise aus (b) durch Einsetzungen, Umbenennungen und Kettenschluß gewinnt.

---

15) So nennen wir der Kürze halber die Umbenennung der gebundenen Variablen.

16) Für die genaue Festlegung der Bedingungen für die Anwendung der beiden letzten Schemata s. H.—B., S. 103 und 104.

Gilt die Behauptung bereits für eine Formel $\mathfrak{F}$, so gilt sie auch für die Formel $\mathfrak{G}$, falls diese aus $\mathfrak{F}$ durch Einsetzung oder Umbenennung entsteht. In der Tat entsteht dann $\mathfrak{G}^{(s)}$ offenbar durch Einsetzungen bzw. Umbenennungen aus $\mathfrak{F}^{(s)}$.

Gilt die Behauptung bereits für die Formeln $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} \to \mathfrak{Q}$, sind also $\mathfrak{P}^{(s)}$ und $(\mathfrak{P} \to \mathfrak{Q})^{(s)}$, d. h. $\mathfrak{P}^{(s)} \to \mathfrak{Q}^{(s)}$ ableitbar, so ist nach dem Schlußschema (*) auch $\mathfrak{Q}^{(s)}$ ableitbar, so daß die Behauptung auch für die Formel $\mathfrak{Q}$ gilt.

Gilt endlich die Behauptung des Hilfssatzes für die Formeln $\mathfrak{P} \to \mathfrak{Q}(a)$ bzw. $\mathfrak{Q}(a) \to \mathfrak{P}$, so gilt sie auch für $\mathfrak{P} \to (x)\mathfrak{Q}(x)$ bzw. $(Ex)\mathfrak{Q}(x) \to \mathfrak{P}$. In der Tat handelt es sich in diesem Fall um den deduktiven Übergang von einer Formel von der Form

$$\mathfrak{B} \to \mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)})$$

zu

$$\mathfrak{B} \to (x^{(1)})(x^{(2)}) \ldots (x^{(s)})\, \mathfrak{U}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)})$$

bzw. von

$$\mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)}) \to \mathfrak{B}$$

zu

$$(Ex^{(1)})(Ex^{(2)}) \ldots (Ex^{(s)})\, \mathfrak{U}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}) \to \mathfrak{B},$$

die sich folgendermaßen ausführen läßt. Im ersten Fall gelangt man zunächst aus der Formel $\mathfrak{B} \to \mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)})$ durch Einsetzung, Anwendung des Schemas $(\alpha)$ und Umbenennung zu $\mathfrak{B} \to (x^{(s)})\, \mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s-1)}, x^{(s)})$, daraus in gleicher Weise zu $\mathfrak{B} \to (x^{(s-1)})(x^{(s)})\, \mathfrak{U}(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(s-2)}, x^{(s-1)}, x^{(s)})$ usf., endlich zu $\mathfrak{B} \to (x^{(1)})(x^{(2)}) \ldots (x^{(s)})\, \mathfrak{U}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)})$. Im zweiten Fall verfährt man in analoger Weise, nur wendet man statt $(\alpha)$ das Schema $(\beta)$ an.

**7.** Wir wenden nun den somit bewiesenen Hilfssatz auf die Formel $\mathfrak{B}$ mit $s = r$ an. Wir erhalten, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{B}$ ableitbar ist, die Ableitbarkeit derjenigen Formel $\mathfrak{B}^{(r)}$, die aus $\mathfrak{A}^{(r)}$ durch Einsetzung von

$$\begin{aligned}(5)\qquad (u^{(1)})(u^{(2)}) \ldots (u^{(r)}) \big(H_1(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(r)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)}) \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} H_2(p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_2^{(r)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)}) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} H_{r_\lambda}(p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(r)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)}) \to \\ \to G_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)})\big)\end{aligned}$$

für die Nennform $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(r)}, p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_2^{(r)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(r)})$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ entsteht.

Erweitern wir nun das Axiomensystem des Prädikatenkalkuls durch das Prädikatensymbol $\Delta(x, y)$ nebst den Axiomen[17])

(J₁) $\Delta(a, a)$

(J₂) $\Delta(a, b) \to (A(a) \to A(b))$

und setzen wir in $\mathfrak{B}^{(r)}$ für $H_\varrho(p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(r)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r)})$ die Formel $\Delta(p^{(1)}, q^{(\varrho)})$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ und für $G_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r)})$ die Formel $F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r_\lambda)})$ ein[18]), so erhalten wir eine Formel, die man aus $\mathfrak{A}^{(r)}$ direkt durch Einsetzung von

$$(u^{(1)})(u^{(2)})\ldots(u^{(r)})\big(\Delta(p_1^{(1)}, u^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_2^{(1)}, u^{(2)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \to \\ \to F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r_\lambda)})\big) \tag{6}$$

für $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(r)}, p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots\, p_2^{(r)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(r)})$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ gewinnen kann.

8. Nun ist aber (6) im erweiterten Axiomensystem überführbar in $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})$. In der Tat gewinnt man die Formel

$$(u^{(1)})(u^{(2)})\ldots(u^{(r)})\big(\Delta(p_1^{(1)}, u^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_2^{(1)}, u^{(2)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \to \\ \to F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r_\lambda)})\big) \to F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})$$

aus der Formel

$$(u^{(1)})(u^{(2)})\ldots(u^{(r)})\big(\Delta(p_1^{(1)}, u_1^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_1^{(1)}, u_2^{(2)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \to \\ \to F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r_\lambda)})\big) \to \\ \to \big(\Delta(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_2^{(1)}, p_2^{(1)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})\big),$$

die aus der bereits (in **6**) als ableitbar erkannten $r$-Transformierten von (a) durch Einsetzungen und Umbenennungen entsteht, durch Vertauschung der Vorderglieder nebst Abtrennung des im erweiterten System offenbar ableitbaren Vordergliedes $\Delta(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_2^{(1)}, p_2^{(1)}) \,\&\ldots\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(1)})$ mit Hilfe des Schlußschemas (*); zur Ableitung der Formel

---

[17]) Dies sind die Axiome der Identität, s. H.—B., S. 165. Wir gebrauchen das Zeichen $\Delta(p, q)$ statt $p = q$.

[18]) Hier wird statt einer Formel-Variable eine Formel eingesetzt, welche nicht sämtliche Argumente der fraglichen Formel-Variablen enthält. Dadurch können Formeln entstehen, die Bestandteile wie $(x)\mathfrak{F}$ oder $(Ex)\mathfrak{F}$ enthalten, wobei $x$ in $\mathfrak{F}$ nicht vorkommt. Das Verbot solcher Formeln bzw. Einsetzungen könnte leicht durch triviale Modifikationen (Hinzufügung von Konjunktionsglieder wie $\Delta(x, x)$ oder $A(x) \vee \overline{A(x)}$) umgegangen werden.

$$(7)\quad F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to (u^{(1)})(u^{(2)}) \ldots (u^{(r)}) \big(\Delta(p_1^{(1)}, u^{(1)}) \,\&\, \\ \&\, \Delta(p_2^{(1)}, u^{(2)}) \,\&\, \ldots \,\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, u^{(r_\lambda)}) \to F_\lambda(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r_\lambda)})\big)$$

verfährt man wie folgt. Aus ($J_2$) ergeben sich die Formeln

$$\Delta(p_1^{(1)}, q^{(1)}) \to \big(F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(q^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})\big),$$
$$\Delta(p_2^{(1)}, q^{(2)}) \to \big(F_\lambda(q^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, p_3^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})\big),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, q^{(r_\lambda)}) \to \big(F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r_\lambda-1)}, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r_\lambda-1)}, q^{(r_\lambda)})\big)$$

durch Einsetzung; also (durch Einsetzung in die identische Formel

$$(A_1 \to (B_1 \to B_2)) \to \Big(\big(A_2 \to (B_2 \to B_3)\big) \to \ldots \Big(\big(A_{r_\lambda} \to (B_{r_{\lambda-1}} \to B_{r_\lambda})\big) \to \\ \to \big(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_{r_\lambda} \to (B_1 \to B_{r_\lambda})\big)\Big) \ldots \Big)$$

und $r_\lambda$-malige Anwendung des Schemas (*))

$$\Delta(p_1^{(1)}, q^{(1)}) \,\&\, \Delta(p_2^{(1)}, q^{(2)}) \,\&\, \ldots \,\&\, \Delta(p_{r_\lambda}^{(1)}, q^{(r)}) \to \\ \to \big(F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}) \to F_\lambda(q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(r_\lambda)})\big),$$

woraus sich (7) durch Vertauschung der Vorderglieder und dann $r$-malige Anwendung des Schemas ($\alpha$) (nebst den nötigen Einsetzungen und Umbenennungen, vgl. **6**, letzter Absatz) ergibt.

**9.** Aus der Überführbarkeit von (6) in $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})$ ergibt sich, daß man ebenfalls zu einer ableitbaren Formel $\mathfrak{C}$ gelangt, falls man in $\mathfrak{A}^{(r)}$ für $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(r)}, p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_2^{(r)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)}, p_{r_\lambda}^{(2)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(r)})$ statt (6) die Formel $F_\lambda(p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_{r_\lambda}^{(1)})$ einsetzt.[19]) Die Formel $\mathfrak{C}$ unterscheidet sich also von $\mathfrak{A}$ nur dadurch, daß jede gebundene Variable in den Klammerzeichen durch die Folge ihrer Komponenten, in den Leerstellen der Funktionsvariablen hingegen durch ihre *erste* Komponente ersetzt wurde.

Um von der Formel $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ zu gelangen, braucht man nur die Klammerzeichen, in denen eine Variable mit oberem Index $^{(2)}, ^{(3)}, \ldots$, oder $^{(r)}$ steht (so daß das Wirkungsbereich der betreffenden Klammerzeichen die Klammervariable nicht enthält), wegzulassen und in den übrigbleibenden Variablen das obere Index $^{(1)}$

[19]) Vgl. H.—B., S. 150, fünfter Absatz. Die Behauptung ergibt sich durch Kombination der Eigenschaft 3 der Überführbarkeit (H.—B., S. 133) mit Regel $\eta$ (H.—B., S. 136).

zu streichen. Die erste dieser Operationen ist gestattet, da die Formeln $(x)\mathfrak{F}$ und $(Ex)\mathfrak{F}$, falls $x$ in $\mathfrak{F}$ nicht vorkommt, wie wir zeigen werden, in $\mathfrak{F}$ überführbar sind; die zweite Operation ist eine Umbenennung der gebundenen Variablen.

Wir haben nur noch die vier Formeln

(8′) $$(x)A \to A,$$

(8″) $$A \to (x)A,$$

(9′) $$(Ex)A \to A,$$

(9″) $$A \to (Ex)A$$

abzuleiten; unsere Überführbarkeitsbehauptung ergibt sich dann durch Einsetzung und Zusammenfassung der wechselseitigen Implikationen in Äquivalenzen. Nun gewinnt man (8′) und (9″) aus (a) bzw. (b) durch Einsetzung von $A$ für $A(p)$, (8″) und (9′) durch Anwendung des Schemas ($\alpha$) bzw. ($\beta$) auf die identische Formel $A \to A$.

Damit ist zunächst nur bewiesen, daß $\mathfrak{A}$ im durch die Identitätsaxiome ($J_1$) und ($J_2$) erweiterten Axiomensystem des Prädikatenkalkuls ableitbar ist. Da aber $\mathfrak{A}$ das Prädikatensymbol $\Delta$ nicht enthält, so lassen sich aus seiner Ableitung auch die Axiome ($J_1$) und ($J_2$) eliminieren[20]; daher ist $\mathfrak{A}$ eine ableitbare Formel des Prädikatenkalkuls, w. z. b. w.

*(Hinzugefügt am 10. September 1934.)*

[20]) H.—B., S. 382, Kursivtext.