Bibliographie.

Stachó Tibor, Felsőbb mennyiségtan, 623 oldal, Budapest, 1933.

[**Tibor Stachó, Mathématiques supérieures,** 623 pages, Budapest, 1933.]

C'est un ouvrage volumineux qui se propose de servir de guide aux élèves-officiers et élèves-ingénieurs pénétrant pour la première fois dans le domaine des mathématiques supérieures en vue des applications. La tâche n'est pas aisée car le champ à parcourir est très large. Traiter toutes les questions avec l'ampleur exigée par le sujet et sans rien céder sur la rigueur des démonstrations conduirait à écrire une encyclopédie que les élèves des hautes écoles d'application ne sauraient s'assimiler faute de temps, et aussi parce que leur goût les porte à ne retenir des abstractions que juste l'indispensable pour arriver au plus vite à la réalité concrète. Le mathématicien doit donc — s'il est consciencieux et s'il ne veut pas donner au lecteur le sentiment d'une fausse sécurité en voilant les difficultés — chercher à dégager des théories l'idée-mère et la mettre bien en lumière, quitte à rogner sur les détails des démonstrations.

Voilà ce que fait l'auteur. Sans pouvoir entrer dans l'examen de toutes les difficultés, il les signale au moins et, incitant à la réflexion, fait mieux comprendre la nature de l'outil mathématique. Peut-être présume-t-il quelquefois trop de la faculté de collaboration des étudiants auxquels il s'adresse, mais nous ne pouvons que le louer des efforts qu'il fait pour montrer l'enchaînement des idées et le véritable rôle des notions capitales. Il ne craint pas de recourir aux divers chapitres de la physique pour justifier l'introduction des notions et opérations nouvelles. Il a, en outre, un constant souci de rajeunir l'exposition des théories classiques et donne, à cet effet, aux notions et théorèmes une forme aussi générale que possible. À notre avis, l'auteur va trop loin dans son effort de s'affranchir des restrictions, par exemple lorsqu'il énonce le théorème fondamental de la représentation conforme pour les domaines ayant au moins deux points frontières. En parlant de l'aire des surfaces courbes, il souligne l'insuffisance de l'ancienne définition, mais ne précise pas assez en quoi la définition correcte lui est supérieure. Mais ce sont des détails qui ne diminuent pas son mérite.

Nous caractériserons le mieux la richesse des sujets traités en transcrivant ici la division de la Table des matières: Notions fondamentales (nombres irrationnels et limites, séries infinies, fonctions élémentaires, éléments de géométrie analytique). Dérivée, intégrale définie et indéfinie. Applications du calcul différentiel et intégral (allure des courbes planes, formule de TAYLOR, interpolation, séries de fonctions, différentiation et intégration numérique et graphique). Nombres et fonctions complexes (représentation conforme, intégrale de CAUCHY, séries de TAYLOR et de LAU-

..ENT, fonctions harmoniques). Résolution des équations (méthodes de la fausse position, de NEWTON, de l'itération, de RUFFINI-HORNER, de LILL; théorème de STURM). Algèbre vectorielle et applications (opérations fondamentales, déterminants, équations linéaires, transformations orthogonales). Éléments de géométrie projective et applications (rapport anharmonique, sections coniques, formes quadratiques et tenseurs, notions de nomographie). Fonctions à plusieurs variables (maxima et minima, intégrales multiples). Éléments d'analyse vectorielle et applications. Équations différentielles et aux dérivées partielles (méthode des approximations successives, équations linéaires à coefficients constants, conditions aux limites, séries de FOURIER). Calcul des probabilités (notions fondamentales d'après MM. MISES et KAMKE, formules asymptotiques, loi de GAUSS).

On voit par cette énumération la multitude des questions discutées. Le tableau serait incomplet si nous n'ajoutions pas que toutes les théories sont éclairées par des problèmes judicieusement choisis dont la solution est poussée jusqu'au calcul numérique avec les méthodes d'approximation les plus appropriées.

A. Szücs.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil I (Teubners math. Leitfäden, Band 21), IV. Auflage, VIII + 201 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1932.

Die vierte Auflage dieses trefflichen und viel benutzten Buches wurde durch einen kurzen Abschnitt über lineare Interpolation mit Fehlerabschätzung, durch zwei kurze Abschnitte über die Umkehrungen der konformen Abbildungen und durch einen Paragraphen über besondere (mittels der linearen und einiger weiteren speziellen Funktionen vermittelte) konforme Abbildungen ergänzt. Außerdem wurden mehrere Ergänzungen und Verbesserungen angebracht. Diese neue Auflage ist zur Einführung in die höhere Mathematik sehr geeignet.

Sz. Nagy.

R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil IV, 2. Heft (Teubners math. Leitfäden, Band 34), bearbeitet von O. DEGOSANG, III + 104 — 52 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Das vorliegende zweite Heft bezieht sich auf die drei letzten Abschnitte des Teils I der *Höheren Mathematik:* III. Funktionen von zwei und mehreren Veränderlichen, IV. Differentialgeometrie ebener Kurven, V. Komplexe Zahlen, Veränderliche und Funktionen. Das Heft enthält 159 Aufgaben. Zu jeder Aufgabe ist das Ergebnis und größtenteils auch eine Anleitung angegeben. Die Aufgaben sind mannigfaltig, sie sind im Allgemeinen nicht schablonenmäßig. Wir können diese Aufgabensammlung jedem Studierenden der Mathematik und Technik aufs wärmste empfehlen.

Sz. Nagy.

Tibor Radó, On the Problem of Plateau (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, zweiter Band, Heft 2), III + 109 pages, Berlin, J. Springer, 1933.

M. RADÓ a résumé dans un petit livre les renseignements utiles à tous ceux qui désirent se faire une idée exacte de l'état actuel du problème de PLATEAU. Il montre l'extrême variété des aspects du problème ou plutôt la multitude extrême des problèmes auxquels a donné lieu la question de trouver la surface minima passant par un contour donné. Comme les recherches classiques se trouvent exposées dans la *Théorie générale des Surfaces* de DARBOUX et les *Gesammelte Abhandlungen* de SCHWARZ, l'auteur s'efforçait surtout de retracer le développement de la théorie depuis l'apparition de la thèse de M. LEBESGUE (en 1902). Il précise avant tout les notions (surface, aire, convergence, etc.) à employer. (L'oeuvre de GEÖCZE à côté de celle de M. LEBESGUE, en qui il faut saluer l'initiateur de tous les progrès accomplis sur ce terrain dans les trente dernières années, trouve ici l'appréciation qu'elle mérite.) Il indique cinq sens différents qu'on donne au problème de PLATEAU (trouver pour l'équation aux dérivées partielles ou pour le système de telles équations dérivant de la condition de premier ordre du minimum de l'aire une solution exempte de certains genres de singularités et satisfaisant aux conditions aux limites) et formule avec précision le problème proprement dit de l'aire minima, ainsi que le problème simultané combinant le problème de PLATEAU avec ce dernier. Après avoir déblayé le terrain dans les trois premiers chapitres, il passe à la discussion du problème de PLATEAU sous sa forme non paramétrique (chapitre IV), puis sous sa forme paramétrique (chapitre V), enfin il présente dans le dernier chapitre consacré au problème simultané et aux généralisations les progrès les plus récents de la théorie auxquels il a pris lui-même une part importante. On lit avec plaisir cet exposé lumineux et bien ordonné qui ne manquera certainement pas de susciter de nouvelles recherches.

A. Szücs.

A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, zweiter Band, Heft 3), V + 62 S., Berlin, J. Springer, 1933.

„Die *Ergebnisse der Mathematik* sollen so elastisch als möglich der Entwicklung unserer Wissenschaft zu folgen vermögen". Diese allgemeine Tendenz der Sammlung weit überbietend gibt das vorliegende Heft einen neuen, einfachen und lückenlosen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung bis zum Gesetz der großen Zahlen.

Der aus seinen tiefgehenden Arbeiten über Integrale, Maßtheorie und asymptotische Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannte russische Forscher erreicht dies durch eine — alle bisher behandelten Fälle umspannende — axiomatische Einordnung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die abstrakte Maßtheorie.

Ein *Körper* F von Teilmengen einer Grundmenge E wird nämlich unendliches *Wahrscheinlichkeitsfeld* genannt, wenn F selbst E enthält und seine Elemente A mit einer solchen nichtnegativen additiven Mengenfunktion belegt werden, daß $P(E) = 1$, und für eine abnehmende Folge $A_n \to 0$ der Grenzwert $\lim P(A_n) = 0$ wird. Die Elemente von E werden *elementare,* jene von F *zufällige Ereignisse* genannt. Die Zahl $P(A)$ ist dann die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A. Bei endlichen Feldern entfällt natürlich die zuletzt angeführte Stetigkeitsbedingung; die unendlichen aber werden in ihre kleinsten Borelschen Oberkörper eindeutig erweitert. Der vielumstrittene Begriff der Wahrscheinlichkeit wird hiemit durch das Axiomensystem implizit definiert. Das Verhältnis zur Erfahrungswelt prüfend bekennt aber der Verfasser, daß er „in hohem Maße den Ausführungen von Herrn v. MISES folgt".

Innerhalb der Theorie der additiven Mengenfunktionen wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung natürlich durch Einführung des *Unabhängigkeitsbegriffes,* d. h. durch Postulieren der Multiplikationssätze umgrenzt. *Zufällige Größen* sind schließlich in Bezug auf $P(A)$ meßbare Abbildungen von E *in* die Menge aller reellen Zahlen. Ihre *Erwartungen* sind dann ihre nach $P(A)$ genommenen abstrakten Lebesgueschen Integrale, die bei stetigen Größen in die Stieltjesschen Integrale nach den Verteilungsfunktionen übergehen.

Dieser Überblick zeigt schon die große Allgemeinheit der Kolmogoroffschen Theorie. Als besondere neue, konkreten physikalischen Fragestellungen entsprungene Punkte seien hier noch die Verteilungen in unendlich-dimensionalen Räumen, sowie die in den Bayesschen Ideenkreis fallende Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen hervorgehoben.

Die abstrakte und knappe Darstellung setzt natürlich Sachkenntnis und speziell Maßtheorie voraus, was mit Rücksicht auf die allgemeine Bedeutung der Theorie sicherlich zu bedauern ist. Die Fachmänner aber werden die von Komplikationen freie klare und strenge Darstellung umso wärmer begrüßen.

T. v. Stachó.

A. Khintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, zweiter Band, Heft 4), V + 77 S., Berlin, J. Springer, 1933.

Nachdem im 3. Heft dieses Bandes der Ergebnisse Herr KOLMOGOROFF die vielumstrittene Grundlagenfrage der Wahrscheinlichkeitsrechnung erledigt und die Theorie bis zum Gesetz der großen Zahlen lückenlos aufgebaut hat, führt uns das vorliegende Heft seines Landsmannes weiter, in das neubelebte Gebiet der asymptotischen Gesetze ein.

Die Darstellung beginnt mit einem eleganten Beweis des Laplace-Ljapounoffschen Grenzwertsatzes unter den (leicht modifizierten) Lindebergschen Bedingungen. Faßt man diesen Satz als Lösung des einfachsten linearen, unstetigen Diffusionsproblems auf, so wird man als Verallgemeinerung auf die von KOLMOGOROFF und DE FINETTI untersuchten stetigen zufälligen Prozesse geführt. Die Gauß-Laplacesche, bisher sogenannte Grenzverteilung gilt bei diesen selbst als Verteilung. Ähnlich zeigt sich, daß die im verallgemeinerten Poissonschen Grenzwertsatz auftretende Grenzverteilung als exakte Verteilung gewisser unstetigen zufälligen Prozesse betrachtet werden kann.

Eingehend werden nun Diffusions- oder Irrfahrtenprobleme: freie und bedingte, unstetige wie stetige behandelt. Die Verallgemeinerung dem Laplaceschen Satze gegenüber besteht bei diesen darin, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lagenänderung nun von Anfangs- *und* Endlage abhängt. Zunächst wird der eindimensionale Fall erledigt. Unter den zweidimensionalen wird sowohl die von PETROWSKY zuerst allgemein behandelte elliptische als auch die parabolische oder einseitige Irrfahrt betrachtet. Die Besprechung der Verteilungen wird sodann mit einer neuen Diskussion der linearen, unstetigen Diffusion bei beschränktem Gesammtverlauf abgeschlossen. Das Schlußkapitel beschäftigt sich nämlich nur mit der Abschätzung der zufälligen Variablen des zuletzt erwähnten (unstetigen wie stetigen) Diffusionsproblems.

Die Verteilungen ergeben sich einheitlich als Lösungen von Differentialgleichungen. Sind diese partielle Gleichungen zweiter Ordnung — wie bereits beim Laplaceschen Problem — so werden sie, PETROWSKY folgend, einheitlich und elegant mit Hilfe der Perronschen Ober- und Unterfunktionen in den Beweisgang einbezogen.

Dieser Überblick zeigt die Bewußtheit, mit welcher Herr KHINTCHINE aus abgesondert stehenden Ergebnissen nur jene behandelt, die sachlich und methodisch zur Einheitlichkeit einer künftigen Theorie am meisten beizutragen scheinen. Andere Feinheiten der Darstellung können hier nur angedeutet werden. So zum Beispiel die Bereitschaft, Zusammenhänge unermüdlich aufzuweisen, Beweise erst kurz zu skizzieren, dann mit bewußtem Verzicht auf Allgemeinheit unter einschränkenden Voraussetzungen und formalen Vereinfachungen so zu führen, daß die Beweisidee möglichst klar hervortrete. Dies verleiht der musterhaften Monographie einen ungewohnten Reiz und anregende Kraft.

T. v. Stachó.

C. C. Mac Duffee, The Theory of Matrices (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, zweiter Band, Heft 5), V + 110 pages, Berlin, J. Springer, 1933.

Nombre de branches importantes des mathématiques sont nées de telle sorte que leurs éléments apparaissaient d'abord dans des disciplines éparses, et quand on a reconnu l'identité foncière sous la variété des revêtements, on a rassemblé, ajusté, complété ces éléments pour en former un corps de doctrine homogène. La théorie des matrices est arrivée à ce stade et le petit livre substantiel de M. MAC DUFFEE est bienvenu pour nous renseigner sur son état présent. L'auteur commence par les définitions premières, explique les notions fondamentales et résume jusqu'aux résultats des dernières investigations. Il a souci surtout de montrer les directions variées du développement de la théorie. Par l'abondance de ses références bibliographiques, il facilite aux lecteurs de remonter aux sources et d'étudier le détail des démonstrations.

Voici les titres des chapitres; ils caractérisent assez bien l'ordonnance et le choix des matières: I. Matrices, tableaux („arrays"), déterminants; II. Équation caractéristique; III. Matrices associées; IV. Équivalence; V. Congruence; VI. Similitude; VII. Composition des matrices; VIII. Équations aux matrices; IX. Fonctions de matrices; X. Matrices d'ordre infini.

A. Szücs.

Kazimierz Bartel, Kotierte Projektionen, deutsch von W. Haack, VI + 80 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Die vorliegende deutsche Ausgabe eines bereits in polnischer Sprache erschienenen Buches enthält eine ausführliche Darstellung der Methode der kotierten Projektionen. Die beiden ersten Kapitel behandeln die Darstellung des Punktes, der Geraden, der Ebene, der Raumkurven und der geradlinigen Flächen. Der Verfasser legt einen besonderen Wert auf instruktive Beispiele. Das dritte Kapitel ist eine Sammlung von praktischen Anwendungen, es behandelt z. B. die Abböschung eines horizontalen Weges mit Ausweichstelle. Diese Anwendungen zeigen deutlich, in welchem Maß das Darstellungsverfahren der kotierten Projektion beim Bau von Wasserstraßen, Chausseen, Eisenbahnen nützlich ist. Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Darstellung topographischer Flächen.

Die Ausführung der Zeichnungen, sowie die ganze Ausstattung des Buches ist sehr hübsch und sorgfältig. Das Buch ist besonders für den Topographen, den Geodäten, den Ingenieur von großem Nutzen.

St. Lipka.

W. Sierpiński, Hypothèse du continu (Monografje Matematyczne, Tom IV), V + 192 pages, Warszawa, Seminarjum Matematyczne, 1934.

Le problème du continu est des plus intéressants et des plus difficiles des mathématiques. Ce problème se rapporte à la question de savoir s'il existe ou non un nombre cardinal transfini plus grand que la puissance de l'ensemble formé des nombres naturels, mais plus petit que celle de l'ensemble des points du continu. Beaucoup de géomètres, à partir de Cantor, essayaient de résoudre ce problème. Mais leurs efforts restaient sans succès. Suivant le préssentiment de Cantor la réponse serait négative. Ce préssentiment forme l'objet de l'hypothèse du continu.

Il existe déjà une vaste littérature de théorèmes démontrés à l'aide de cette hypothèse. La plupart d'entre eux ont été publiés dans les *Fundamenta Mathematicae*. La livre de M. Sierpiński nous donne un résumé systématique de cette littérature. Nous y retrouvons presque tous les résultats déjà acquis, mais aussi quelques-uns de nouveau qui n'ont pas été publiés auparavant.

Le premier chapitre est consacré aux propositions équivalents à l'hypothèse. Par conséquant, les tentatives de les prouver ou les ébranler n'auront aucune chance de réussir que dans le cas où le problème du continu serait résolu.

La plus grande partie de l'ouvrage s'occupe des propositions de nature différente. Ce sont des conséquences tirées de l'hypothèse qui n'ont pas permis jusqu'à nos jours de conclure, à leur aide, à la vérité de l'hypothèse elle-même. En effet, l'auteur nous communique, dans un supplément, un résultat très récent (de Mars 1934) de M. LUSIN, qui démontre sans employer l'hypothèse une conséquence traitée dans le livre.

Beaucoup de théorèmes de ce dernier genre sont proposées au sujet des catégories de BAIRE et de la mesure de LEBESGUE. Une relation de dualité est aussi établie entre ces deux espèces de propositions. Cette dualité est fondée sur la conséquence suivante de l'hypothèse: Il existe une fonction $f(x)$ biunivoque défine dans l'ensemble E de tous les nombres réels, telle que $f(E) = E$ et qui transforme chaque ensemble de première catégorie en un ensemble de mesure nulle et réciproquement, sa fonction inverse transforme tout ensemble de mesure nulle en un ensemble de première catégorie.

Un excellent moyen de démontrer des énoncés sur la catégorie des ensembles est celle des conséquences de l'hypothèse du continu, d'après laquelle il existe un ensemble de LUSIN (c'est à dire: un ensemble linéaire qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble parfait non-dense) de la puissance du continu. Dans un chapitre à part il s'agit de théorèmes de ce genre.

Nous trouvons encore des chapitres plus courts sur les alephs inaccessibles, sur des ensembles effectifs et sur l'hypothèse du continu dite généralisée.

Tous ceux qui s'intéressent à la théorie des ensembles, mais surtout ceux qui se sont occupés du problème du continu accueilleront sans doute cet excellent ouvrage avec grand plaisir. Grâce à son objet intéressant, à sa clarté et à sa construction logique, il mérite bien les suffrages de tous.

G. Hajós.