Über einen Satz von J. Pál.

Von HARALD BOHR in Kopenhagen.

In seiner Abhandlung: Sur des transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier (*Comptes rendus Paris*, **158** (1914), p. 101) hat J. PÁL den folgenden sehr interessanten Satz bewiesen:

Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetige, reelle Funktion mit $f(0) = f(2\pi)$. Dann gibt es immer eine im Intervalle $0 \leqq u \leqq 2\pi$ stetige, monoton wachsende Funktion $g(u)$ mit $g(0) = 0$, $g(2\pi) = 2\pi$, derart, daß die Fourierreihe $\sum_0^\infty (a_n \cos nu + b_n \sin nu)$ der Funktion $h(u) = f(g(u))$ im ganzen Intervalle $(0, 2\pi)$ konvergiert, und zwar *gleichmäßig in jedem Teilintervall* $0 < \delta < u < 2\pi - \delta$.

Der Beweis von PÁL beruhte auf dem folgenden bekannten Satz von FEJÉR[1]): Es sei $F(z) = F(x+iy)$ eine, im offenen Einheitskreise $|z| < 1$ analytische, im abgeschlossenen Kreise $|z| \leqq 1$ stetige Funktion, deren Potenzreihe für $|z| < 1$ mit $\sum_0^\infty a_n z^n$ bezeichnet wird. Ferner sei angenommen, daß die Funktion $w = F(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf ein schlichtes Gebiet der w-Ebene abbildet. Dann konvergiert die Potenzreihe auch auf dem Rande des Einheitskreises, und zwar gleichmäßig im ganzen abgeschlossenen Bereiche $|z| \leqq 1$.

Bemerkung: Für einen späteren Zweck erinnern wir daran, daß im Fejérschen Beweis die Annahme der Schlichtheit der Abbildung nur benutzt wird, um schließen zu können, daß das In-

---

[1]) L. FEJÉR, La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, *Comptes rendus Paris*, **156** (1913), p. 46.

tegral $\iint\limits_{|z|<1} |F'(z)|^2 dx\,dy < \infty$ ist. Der Fejérsche Satz gilt also auch für jede in $|z|<1$ analytische, in $|z| \leqq 1$ stetige Funktion $F(z)$, für welche das Integral $\iint\limits_{|z|<1} |F'(z)|^2 dx\,dy$ einen endlichen Wert besitzt. Natürlich genügt es hierzu z. B. $\iint\limits_{\frac{1}{2}<|z|<1} |F'(z)|^2 dx\,dy < \infty$ zu wissen.

Der Pálsche Beweis verlief nun, kurz skizziert, folgendermaßen: Die Kurve $y=f(x)$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$, wurde zu einer Jordankurve J erweitert, etwa in der in Fig. 1[a] angegebenen Weise. Das

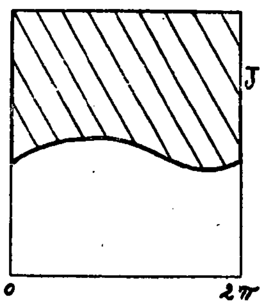

Fig. 1[a]

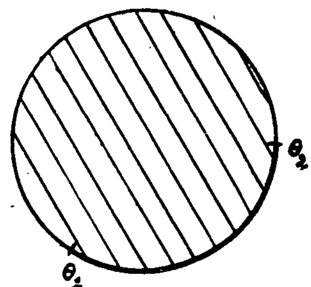

Fig. 1[b]

Innere dieser Jordankurve wurde danach konform auf den Einheitskreis $|\zeta|<1$ der $\zeta = re^{i\theta}$-Ebene abgebildet (Fig. 1[b]), etwa durch die Funktion $z = F(\zeta) = \sum\limits_{0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n$. Hierbei geht die Randkurve J bekanntlich stetig in den Einheitskreis $|\zeta| = 1$ über, so daß die Funktion $F(\zeta)$ den Bedingungen des Fejérschen Satzes genügt. Nach diesem Satz konvergiert also die Potenzreihe $\sum\limits_{0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n$ gleichmäßig für $|\zeta| \leqq 1$. Bei der Randabbildung möge der aus der ursprünglich gegebenen Kurve $y=f(x)$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$, bestehende Teil von J in den abgeschlossenen Kreisbogen $r=1$, $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ übergehen. Schließlich wurde nun das Intervall $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ linear auf das (größere) Intervall $0 \leqq u \leqq 2\pi$, etwa durch die Funktion $\theta = c + du$, abgebildet, und die entsprechende Funktion $F(e^{i(c+du)}) = G(u)$, $0 \leqq u \leqq 2\pi$, gebildet. Es wurde nun nachgewiesen, daß durch diese lineare Transformation der unabhängigen Veränderlichen die gleichmäßige Konvergenz der zugehörigen Fourierreihe nicht „wesentlich" gestört wird, das heißt genau gesprochen, daß die Fourierreihe $\sum_{0}^{\infty}\gamma_n e^{inu}$ der komplexen Funktion $G(u)$ bei jedem $\delta>0$ für $\delta<u<2\pi-\delta$ gleichmäßig konvergiert. Trennen wir nun die Darstellung $z=x+if(x)=\sum_{0}^{\infty}\gamma_n e^{inu}=$ $=\sum_{0}^{\infty}(\gamma_n'+i\gamma_n'')$ $(\cos nu+i\sin nu)$ in ihre reelle und rein imaginäre Komponente, also

$$x=\sum_{0}^{\infty}(\gamma_n'\cos nu-\gamma_n''\sin nu)=g(u)$$

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}(\gamma_n'\sin nu+\gamma_n''\cos nu)=h(u)=f(g(u)),$$

so haben wir offenbar in der monotonen Transformation $x=g(u)$ eine Transformation im Sinne des Pálschen Satzes.

Der Satz von PÁL hat den kleinen Schönheitsfehler, daß die Fourierreihe der transformierten Funktion $h(u)$ *nicht im ganzen Intervall* $0\leq u\leq 2\pi$ *gleichmäßig konvergiert, sondern nur in jedem Teilintervall* $0<\delta<u<2\pi-\delta$, und dies hängt auf das engste damit zusammen, daß bei der konformen Abbildung, welche ja der entscheidene Punkt beim Beweise war, Hilfslinien etwas zufälliger Natur verwendet werden mußten, um die gegebene Kurve $y=f(x)$, $0\leq x\leq 2\pi$ zu einer geschlossenen Jordankurve zu ergänzen.

Der Zweck der vorliegende Note ist nun zu zeigen, wie man durch eine kleine Abänderung des Pálschen Beweises diese kleine Unvollkommenheit in natürlicher Weise beseitigen kann, indem man, statt die gegebene Kurve $y=f(x)$, $0\leq x\leq 2\pi$ zu einer im Endlichen liegenden Jordankurve zu ergänzen, die Kurve einfach *periodisch fortsetzt* und danach das eine von den beiden unbeschränkten Gebieten, welche von der so entstandenen Kurve begrenzt werden, konform auf *eine Halbebene* abbildet.

Für diese Abbildung gilt der folgende, mit Hilfe des obigen Fejérschen Satzes sofort zu beweisende Hilfssatz, wobei wir der Bequemlichkeit halber die gegebene Funktion $y=f(x)$ als überall positiv annehmen können (sonst addiere man zu $f(x)$ eine geeignete positive Konstante):

Es sei $y=f(x)$, $-\infty<x<\infty$, eine positive, stetige periodische Funktion mit der Periode 2π. In der $z=x+iy$-Ebene betrachten wir den abgeschlossenen Bereich $-\infty<x<\infty$, $y\geqq f(x)$, der mit

G bezeichnet sei (Fig. 2[a]). Dieser Bereich werde auf die abgeschlossene Halbebene $v \geqq 0$ der $w = u + iv$-Ebene abgebildet (Fig. 2[b]), und zwar konform im Innern, und daher stetig auf dem Rande; weiter soll die Abbildung so normiert sein, daß die drei Rand-

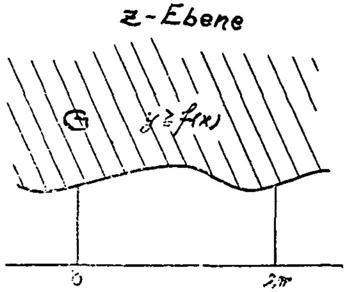

Fig. 2[a]

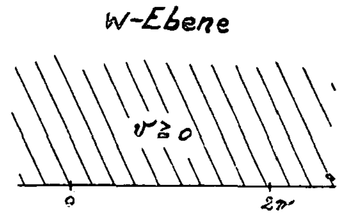

Fig. 2[b]

punkte $0 + if(0)$, $2\pi + if(2\pi)$, ∞ der z-Ebene in die drei Randpunkte 0, 2π, ∞ der w-Ebene übergehen. Dann wird die Abbildung durch eine Funktion der Form

$$z = w + \psi(w)$$

vermittelt, wo $\psi(w)$ periodisch mit der Periode 2π ist und eine Entwicklung der Form

$$\psi(w) = \sum_0^\infty \beta_n e^{inw}$$

zulässt, die gleichmäßig in der ganzen abgeschlossenen Halbebene $v \geqq 0$ konvergiert.

Bevor wir den einfachen Beweis dieses Satzes erbringen, bemerken wir, daß aus ihm der Pálsche Satz in der erwähnten verschärften Form unmittelbar gefolgert werden kann. Wir haben ja nur in der Darstellung

$$x + if(x) = u + \sum_0^\infty \beta_n e^{inu} = u + \sum_0^\infty (\beta_n' + i\beta_n'') e^{inu}$$

Reelles und Imaginäres zu trennen, also

$$x = u + \sum_0^\infty (\beta_n' \cos nu - \beta_n'' \sin nu) = g(u),$$

$$f(x) = \sum_0^\infty (\beta_n' \sin nu + \beta_n'' \cos nu) = h(u) = f(g(u))$$

zu setzen. Die monotone Transformation $x = g(u)$ liefert somit das Gewünschte.

Um schließlich den oben formulierten Hilfssatz zu beweisen, führen wir die genannte Abbildung von G auf die Halbebene $v \geqq 0$ in den folgenden Schritten aus.

Zuerst bilden wir die ganze Halbebene $y \geqq 0$ mit Hilfe der Funktion

$$s = e^{iz}$$

auf den unendlich-blättrigen Einheitskreis $|s| \leqq 1$ mit dem Windungspunkt $s = 0$ ab.

Hierbei geht die periodische Kurve $y = f(x)$ in die unendlich oft durchlaufene Jordankurve j (Fig. 3ª)

$$s = e^{i(x+if(x))} = e^{-f(x)}\, e^{ix}$$

über, die übrigens von jedem von $s = 0$ ausgehenden Halbstrahl in genau einem Punkt getroffen wird.

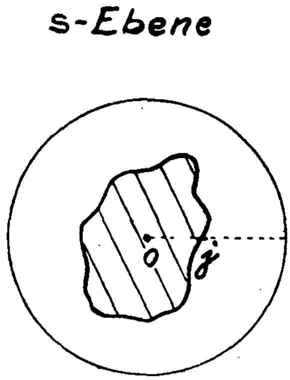

Fig. 3ª

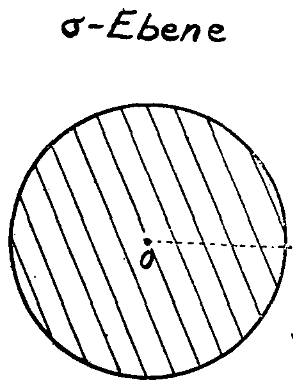

Fig. 3ᵇ

Danach wird der abgeschlossene schlichte Bereich, welcher von dieser Kurve j begrenzt wird, auf den Einheitskreis $|\sigma| \leqq 1$ der $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ Ebene abgebildet (Fig. 3ᵇ), wiederum konform im Inneren und stetig auf dem Rande, und zwar so, daß dem Punkte $s = 0$ der Punkt $\sigma = 0$ entspricht und der auf der positiven reellen Achse gelegene Punkt von j in den Punkt $\sigma = 1$ übergeht. Diese Abbildung möge durch.

$$s = \Omega(\sigma) = \sigma \,.\, \omega(\sigma) = \sigma \sum_{0}^{\infty} \delta_n \sigma^n$$

dargestellt sein. Hierbei ist, wegen der Schlichtheit der Abbildung, $\omega(\sigma) \neq 0$ für $|\sigma| \leqq 1$ und das Integral

$$\iint\limits_{|\sigma|<1} |\Omega'(\sigma)|^2\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

endlich.

Schließlich wird der nunmehr als unendlichblättrig aufgefaßte Einheitskreis $|\sigma| \leqq 1$ auf die Halbebene $v \geqq 0$ der w-Ebene durch die Funktion

$$\sigma = e^{iw}$$

abgebildet.

Durch Zusammensetzung der drei besprochenen Abbildungen

$$z = \frac{1}{i} \log s, \quad s = \Omega(\sigma), \quad \sigma = e^{iw}$$

erhalten wir offenbar die gewünschte Abbildung der Halbebene $v \geqq 0$ der w-Ebene auf den Bereich G der z-Ebene, da ja (nach passender Normierung von $\log s$) die Punkte $0, 2\pi, \infty$ in $if(0)$, $2\pi + if(2\pi)$, ∞ übergehen.

Die Funktion $z = \lambda(w)$, welche diese Abbildung liefert, wird somit durch

$$z = \frac{1}{i} \log \Omega(\sigma) = \frac{1}{i} \log \sigma + \frac{1}{i} \log \omega(\sigma), \quad \sigma = e^{iw}$$

gegeben.

Indem wir die für $|\sigma| < 1$ analytische, für $|\sigma| \leqq 1$ stetige Funktion $\frac{1}{i} \log \omega(\sigma)$ mit $L(\sigma)$ und ihre Potenzreihe mit $\sum_0^\infty \beta_n \sigma^n$ bezeichnen, erhalten wir also schließlich

$$z = w + L(e^{iw}) = w + \psi(w) = w + \sum_0^\infty \beta_n e^{inw}.$$

Vorläufig wissen wir aber nur, daß die Entwicklung $\sum_0^\infty \beta_n \sigma^n$ der Funktion $L(\sigma)$ im Inneren des Einheitskreises gilt; um den Beweis zu Ende zu führen, haben wir noch darzutun, daß die Potenzreihe im *abgeschlossenen* Kreise $|\sigma| \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert. Hierzu genügt es nach der anfangs gemachten Bemerkung zum Fejérschen Satz zu zeigen, daß das Integral

$$\iint\limits_{\frac{1}{2} < |\sigma| < 1} |L'(\sigma)|^2 \, d\sigma_1 \, d\sigma_2 = \iint\limits_{\frac{1}{2} < |\sigma| < 1} \left| \frac{\omega'(\sigma)}{\omega(\sigma)} \right|^2 d\sigma_1 \, d\sigma_2 < \infty$$

ist.

Dies folgt aber sofort aus der Tatsache, daß

$$\iint\limits_{|\sigma| < 1} |\Omega'(\sigma)|^2 \, d\sigma_1 \, d\sigma_2 < \infty$$

ist. Bezeichnen wir nämlich Min $|\omega(\sigma)|$ für $|\sigma| \leqq 1$ mit m (>0), so folgt aus

$$\Omega'(\sigma) = \sigma \,.\, \omega'(\sigma) + \omega(\sigma)$$

für $\frac{1}{2} < |\sigma| < 1$

$$\left|\frac{\omega'(\sigma)}{\omega(\sigma)}\right| \leqq \frac{1}{|\sigma|}\left\{\frac{|\Omega'(\sigma)|}{|\omega(\sigma)|}+1\right\} \leqq 2\left\{\frac{|\Omega'(\sigma)|}{m}+1\right\},$$

also

$$\left|\frac{\omega'(\sigma)}{\omega(\sigma)}\right|^2 \leqq 8\left\{\frac{|\Omega'(\sigma)|^2}{m^2}+1\right\}$$

und somit

$$\iint\limits_{\frac{1}{2}<|\sigma|<1} \left|\frac{\omega'(\sigma)}{\omega(\sigma)}\right|^2 d\sigma_1\, d\sigma_2 \leqq \frac{8}{m^2} \iint\limits_{|\sigma|<1} |\Omega'(\sigma)|^2\, d\sigma_1\, d\sigma_2 + 8\pi < \infty.$$

(Eingegangen am 4. April 1935.)