Sur l'indice des transformations analytiques.

Par B. DE KERÉKJÁRTÓ à Szeged.

Dans cette note, je donne quelques propositions simples sur la topologie des transformations analytiques, en particulier concernant l'indice d'une transformation. Elles semblent être utiles dans la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe; que cette circonstance justifie leur publication malgré leur extrème simplicité.

1. Désignons par C une courbe simple et fermée dans le plan de la variable complexe z, et par (C) le domaine formé par C et son intérieur. Une *courbe continue et fermée* C' est l'image de C obtenue par une transformation univoque et continue T de C. Nous appelons T une *transformation analytique* de C si elle est engendrée par une fonction analytique dans le domaine (C).

(*a*) *Si T est une transformation analytique, tout point du plan n'appartenant pas à la courbe $C' = T(C)$ a un ordre positif ou nul par rapport à la courbe C' parcourue dans le sens qui correspond à un circuit positif de C.*

Supposons que pour tout point z de C, le point image $z' = T(z)$ soit différent de z. La direction du *vecteur de la transformation T* dirigé du point z vers le point $z' = T(z)$ subit un changement de $2n\pi$ lorsque z fait un circuit de C dans le sens positif. Nous appelons le nombre entier n l'*indice* de la tranformation T.

(*b*) *L'indice d'une transformation analytique est positif ou nul.*

Soit $w = S(z)$ une représentation conforme et biunivoque de l'intérieur de C en soi-même, et soient a et b des nombres complexes tels que pour tout point z de C soit $a \,.\, T(S(z)) + b \neq z$.

(*c*) *Si T est analytique, l'indice de la transformation $z'' = a \,.\, T(S(z)) + b$ de la courbe C est positif ou nul.*

Les propositions (a), (b), (c) sont des conséquences immédiates des formules de CAUCHY. Elles permettent de reconnaître en un nombre de cas si une transformation de la courbe C en C', soumise à certaines conditions concernant la correspondance de leurs points, ne peut pas être réalisée par une transformation analytique.

2. Commençons par le théorème suivant dû à M. PÓLYA[1]). Soit (C) le rectangle $a_1 \leqq x \leqq a_2$, $b_1 \leqq y \leqq b_2$ $(z = x + iy)$. Une transformation univoque et continue T de $C: z' = T(z) = u + iv$ est appelée une *compression unilatérale* de C si elle vérifie les conditions suivantes: $u(a_1 + iy) < a_1$, $u(a_2 + iy) > a_2$, $b_1 < v(x + ib_1) < b_2$, $b_1 < v(x + ib_2) < b_2$ Le théorème de PÓLYA énonce qu'*une compression unilatérale de C ne peut pas être obtenue par une transformation analytique de C.* — Pour le démontrer, on peut supposer que les images des sommets de C se trouvent sur les lignes horizontales passantes par ces points (fig. 1.); le changement de la direction du vecteur $\overrightarrow{zz'}$ dans un circuit positif de C est $-\pi$ sur chacun des côtés horizontaux, et 0 sur les côtés verticaux de C. L'indice de T est donc -1; d'après la proposition (b), la transformation T ne peut pas être analytique.

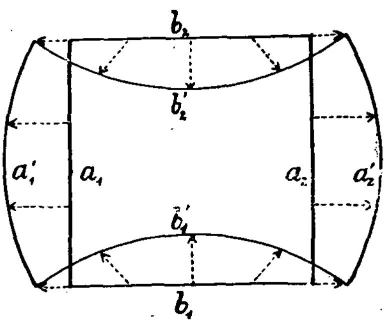

Fig. 1.

Le lemme suivant de AHLFORS, utilisé pour sa généralisation du théorème de PICARD[2]), et dont la méthode a été le point de départ pour le théorème de PÓLYA, est une conséquence immédiate dudit théorème, en vertu de la proposition (c): *Soit $f(z) = u + iv$ une fonction analytique dans le rectangle*: $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq 1$, *vérifiant les conditions suivantes: $|f(z)| \leqq 1$, et $u(x) \leqq \alpha < \beta \leqq u(x+i)$; alors* $b - a \leqq \dfrac{2}{\beta - \alpha}$.

3. Par la même méthode, on obtient la généralisation suivante des théorèmes ci-dessus:

1) G. PÓLYA, Über analytische Deformationen eines Rechtecks, *Annals of Math.*, **34** (1933), p. 617—620.

2) L. AHLFORS, Sur une généralisation du théorème de Picard, *C. R. Académie des Sciences, Paris,* **194** (1932), p. 245.

Soit C une courbe simple et fermée, composée de $2n$ ($\geqq 4$) arcs consécutifs que nous désignons par $l_1, l_2, \ldots, l_{2n}$, orientés d'une façon correspondante à un circuit positif de C. Soit T une transformation univoque et continue de C; désignons par l'_i l'image orientée de l_i. Supposons que l_i et l'_i n'aient pas de point commun, que les arcs $l_1, l_3, \ldots, l_{2n-1}$ soient extérieurs à C', et les arcs $l'_2, l'_4, \ldots, l'_{2n}$ extérieurs à C; ensuite que les nombres d'intersection[3] $(l_{2\nu}, l'_{2\nu+1})$ *et* $(l'_{2\nu+1}, l_{2\nu+2})$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1;\ l_0 = l_{2n})$ *soient tous égaux à* $+1$. *Dans ces conditions, T ne peut pas être analytique* (voir fig. 2.).

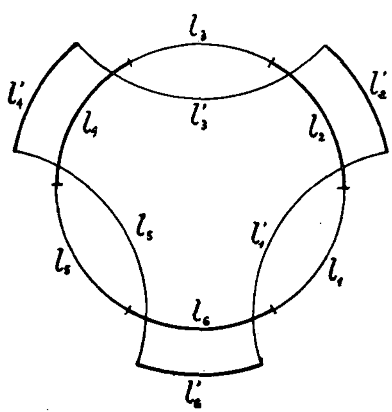

Fig. 2.

Nous allons montrer que l'indice de T est $(1-n)$; comme il est négatif, T ne peut pas être analytique, d'après la proposition (*b*). Par raisons de simplicité, nous pouvons supposer que C est une circonférence. Nous effectuons les déformations suivantes sur les courbes C et C' au cours desquelles aucun point de C ne coïncide avec son image, par conséquent l'indice de la transformation reste inaltéré. Nous déformons C en soi-même de telle façon que les arcs $l_1, l_3, \ldots, l_{2n-1}$ de C soient réduits à leurs milieux. Ensuite nous déformons la courbe C' de telle façon que chacun des arcs $l'_2, l'_4, \ldots, l'_{2n}$ soit réduit à un seul point, en particulier l'arc $l'_{2\nu}$ au point commun des tangentes de C menées aux points correspondants à $l_{2\nu-1}$ et $l_{2\nu+1}$. Dans un circuit positif de C, la direction du vecteur de la transformation subit un changement par $-\pi$ sur chacun des arcs $l_{2\nu+1}$, et par $(2-n)\pi$ sur la totalité des arcs $l_{2\nu}$; son changement total est donc $(1-n)2\pi$. (Voir aussi la formule (1) du No. 4.)

On obtient la proposition suivante comme une application du théorème que nous venons de démontrer:

Soit $f(z)$ une fonction analytique pour $|z| \leqq 1$, et y soit $|f(z)| \leqq 1$. Supposons que sur deux arcs z_1z_2 et z_3z_4 de la circon-

[3]) H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, 2. éd., Leipzig, Berlin 1923, p. 167.

férence soit $|f(z)|=1$, *sur les deux autres arcs* z_2z_3 *et* z_4z_1 *soit* $|f(z)|<1$. *Le rapport anharmonique* $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)]$ *est alors supérieur ou égal au rapport anharmonique* $[z_1, z_2, z_3, z_4]$.

Supposons le contraire: $[z_1', z_2', z_3', z_4'] < [z_1, z_2, z_3, z_4]$ où $z_i' = f(z_i)$. Par une transformation homographique H du cercle unité en soi-même on peut alors transformer les points z_i' en des points ζ_i tels que ζ_1 et ζ_2 soient intérieurs à l'arc z_1z_2, et que ζ_3, ζ_4 soient intérieurs à l'arc z_3z_4. Désignons par T la transformation de la circonférence C engendrée par la fonction $f(z)$. Les arcs z_2z_3 et z_4z_1 sont à distance $>\varepsilon(>0)$ de leurs images obtenues par la transformation TH. Soit S une similitude de centre $z=0$ qui transforme C en une circonférence C'' intérieure à C, telle que tout point de C soit en distance $<\varepsilon$ de son image. La transformation $S^{-1}TH$ de la circonférence C'' vérifie les prémisses du théorème ci-dessus; elle ne pourrait pas être analytique contrairement à nos hypothèses.

4. Dans ce paragraphe, nous établirons des formules pour la *détermination géométrique de l'indice d'une transformation.* Soit C une courbe simple et fermée, et soit C' l'image de C obtenue par une transformation univoque et continue T sans point invariant sur C. Si C et C' n'ont pas de point commun, l'indice de la transformation T est égal à $+1$, ou à l'ordre d'un point intérieur de C par rapport à la courbe C', suivant que C' est intérieur ou extérieur à C.

Supposons dans la suite que C et C' se rencontrent en un nombre fini de points dont chacun est un point d'intersection de ces deux courbes. La situation de ces points et de leurs images sur les courbes C et C' détermine l'indice de T. Nous ne considérerons ici que le cas où aussi *C' est une courbe simple et fermée.* Commençons par le cas où les courbes orientées C et C' déterminent le même sens d'orientation dans le plan; nous disons dans ce cas que les orientations de C et de C' sont concordantes. Supposons ensuite que les points communs à C et à C' forment une *distribution normale,* c'est-à-dire que leurs ordres cycliques sur les deux courbes sont les mêmes; supposons enfin que la transformation T déplace tout point de C par une distance très petite. Désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ les points communs à C et à C' dans leur ordre sur la courbe C; soient $P_1', P_2', \ldots, P_{2n}'$ leurs images. Nous attribuons aux points P_k les indices δ_k et δ_k' par la préscription suivante: soit $\delta'_k = \pm 1$ suivant que la courbe orientée C' passe par le point P_k de l'extérieur de C à son intérieur, ou inversement; (évidemment on a $\delta'_k = (-1)^{k+1}\delta'_1$); soit $\delta_k = \pm 1$ suivant que l'arc $P_k P'_k$ de la courbe C', lequel ne contient pas les autres points P_l, P'_l, orienté de P_k vers P'_k, correspond à l'orientation positive ou négative de C'. L'indice de la transformation T est exprimé alors par la formule suivante:

$$\Omega = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \delta_k \delta'_k. \tag{1}$$

(Voir, par exemple, la figure 2., où pour tout k : $\delta_k = -\delta'_k$; $\Sigma\,\delta_k\delta'_k = -2n$, et $\Omega = 1 - n$.)

Encore sous la condition que les orientations de C et de C' sont concordantes, mais en supprimant les autres conditions restrictives, la définition des indices δ'_k restera la même. Les indices δ_k seront alors définis de la façon suivante. Les points $P'_1, P'_2, \ldots P'_{2n}$ divisent la courbe C' en $2n$ arcs; supposons que P'_ν soit différent de P_1 et que l'arc $P'_\nu P'_{\nu+1}$ de C' contienne le point P_1; le point P'_ν est uniquement déterminé par ces propriétés. Désignons par A' un point intérieur de l'arc $P'_\nu P_1$ de C' tel que l'arc $A'P_1$ de C' ne contienne aucun des points $P_2, P_3, \ldots, P_{2n}$. L'indice δ_k est égal à ± 1 suivant que l'arc positif $A'P'_k$ de C' contient ou non le point P_k. L'indice de la transformation T sera exprimé par la formule:

$$\Omega = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \delta_k \delta'_k + \frac{\delta'_1}{2}\left((-1)^\nu - 1\right). \tag{2}$$

Si les orientations de C et de C' sont opposées, conservant les mêmes définitions des indices δ_k et δ'_k, l'indice de la transformation T sera exprimé par la formule:

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \delta_k \delta'_k + \frac{\delta'_1}{2}\left((-1)^\nu - 1\right). \tag{3}$$

Je n'insisterai pas sur une simplification de ces formules; on pourrait, en effet, renuméroter les points P_k de façon que le membre $\frac{\delta'_1}{2}\left((-1)^\nu - 1\right)$ dans le deuxième terme disparaisse; mais cela aurait d'autre part le désavantage de chercher d'abord un numérotage convenable avant pouvoir appliquer les formules. Toutefois on peut supposer que $\delta'_1 = +1$, c'est-à-dire que nous donnons l'indice $k = 1$ à un tel point P_1 par lequel la courbe orientée C' passe de l'extérieur de C dans son intérieur.

5. Pour vérifier nos formules, nous montrons d'abord que (3) est une conséquence de (2). Soit K une circonférence suffisamment grande contenant les courbes C et C'. Sur un arc de C' qui appartient à la frontière du domaine non borné, déterminé par $C+C'$, nous prenons deux points voisins B'_1 et B'_2, et nous les joignons à deux points voisins A_1 et A_2 de K par des lignes B'_1A_1 et B'_2A_2 lesquelles n'ont aucun point sur K, C et C', sauf leurs extrémités. (Fig. 3.) Soit B_1B_2 l'arc de C dont l'image est $B'_1B'_2$; nous le transformons topologiquement sur l'arc composé de la ligne B'_1A_1, du grand arc A_1A_2 de K, et de la ligne $A_2B'_2$, de telle façon que l'image de B soit B'_i $(i=1, 2)$. Cette transformation de l'arc B_1B_2, et la transformation T sur l'arc $C-B_1B_2$ forment ensemble une transformation topologique T'' de C sur la courbe C'' obtenue de C' en remplaçant l'arc $B'_1B'_2$ par la ligne $B'_1A_1+A_1A_2+A_2B'_2$. Les orientations de C et de C'' sont concordantes. On voit immédiatement que la différence des indices de T'' et de T est égale à $+1$. Par conséquent, la formule (3) résulte de (2); aussi il est clair que (1) n'est qu'un cas particulier de (2).

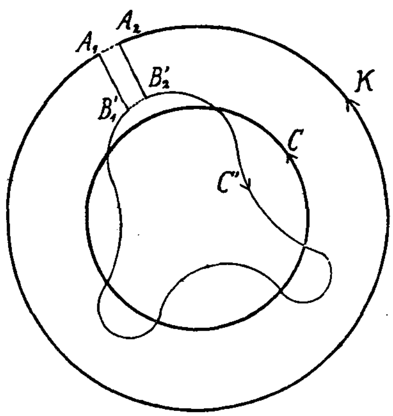

Fig. 3.

Pour vérifier la formule (2), nous déformons continuement la courbe C' en elle-même de telle façon que l'arc $P'_1P'_2\dots P'_{2n}$ soit réduit au seul point A'; dans ce cas l'indice de la transformation est $\Omega'=+1$. (Voir fig 4., pour $n=1$, dont on obtient la même proposition pour n quelconque par une induction évidente de n à $n+1$). Soit B' un point de l'arc $P'_{2n}P'_1$ de C'; nous effectuons la déformation de C' de telle

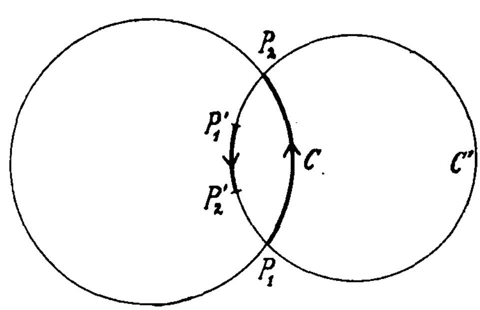

Fig. 4.

façon que les points A' et B' restent invariables; alors chacun des arcs $A'P'_{2n}$ et P'_1A' sera déformé en soi-même au seul point A'. Si au cours de cette déformation, le point P'_k traverse le point P_k, l'indice de la transformation s'augment ou se diminue de 1. En particulier, si $k \geqq \nu + 1$, c'est-à-dire si P'_k appartient à l'arc $A'P'_{2n}$, désignons par η_k le nombre 1 ou 0, suivant que l'arc $A'P'_k$ contient ou non le point P_k; comme P'_k se déplace au cours de la déformation dans le sens négatif sur C', lorsqu'il traverse le point P_k, l'indice de la transformation s'augment ou se diminue d'un suivant que dans le point P_k, la courbe orientée C' passe de l'intérieur de C à son extérieur, ou inversement, c'est-à-dire suivant que l'indice δ'_k est ∓ 1 (voir fig. 5., pour $\delta'_k = +1$). — Si $k \leqq \nu$, P'_k appartient à l'arc P'_1A'; désignons par η_k le nombre

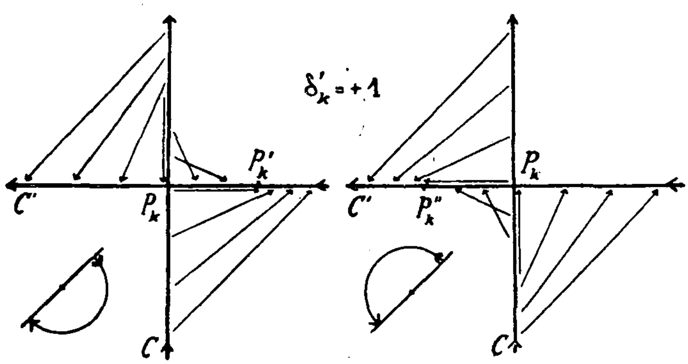

Fig. 5.

— 1 ou 0 suivant que l'arc P'_kA' contient ou non le point P_k. Lorsque nous réduisons l'arc P'_1A' au seul point A', si $\eta_k = -1$, le point P'_k $(k \leqq \nu)$ traverse le point P_k dans le sens positif sur la courbe C'; alors l'indice de la transformation s'augment ou se diminue d'un suivant que $\delta'_k = \pm 1$. — En résumé, pour $k \geqq \nu + 1$, et pour $k \leqq \nu$, le changement de l'indice de la transformation effectué par le point P'_k est égal à $-\eta_k \delta'_k$; par conséquent, entre l'indice Ω de la transformation primitive T et l'indice Ω' de la transformation produit de T et de la déformation, la relation subsiste:

$$\Omega' = \Omega - \sum_{k=1}^{2n} \eta_k \delta'_k.$$

Or, comme nous l'avons fait observer, $\Omega' = +1$; d'autre part,

$\eta_k = \frac{1}{2}(\delta_k - 1)$ pour $k \leqq \nu$, et $\eta_k = \frac{1}{2}(\delta_k + 1)$ pour $k \geqq \nu + 1$;
par conséquent

$$\Omega = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \eta_k \delta'_k = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \delta_k \delta'_k + \frac{\delta'_1}{2}((-1)^\nu - 1).$$

Nous faisons encore la remarque que dans le cas d'une courbe image C' admettant de points doubles, l'expression de l'indice de la transformation contient encore les ordres des points P_k par rapport aux courbes fermées constituées par les arcs $P'_i P'_{i+1}$ de C'.

6. Pour la *détermination analytique de l'indice d'une transformation*, il faudrait calculer l'intégrale de KRONECKER[4], ou, pour le cas d'une transformation analytique d'une variable complexe, l'intégrale de CAUCHY. En certains cas, il est plus facile de comparer la transformation à une autre dont l'indice est connu.

Désignons par $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des coordonnées cartésiennes dans l'espace E^n; soit S une variété close à $n-1$ dimensions dans E^n. Désignons par $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ un système de n fonctions uniformes et continues sur S. Si pour tout point de S: $f^2 = f_1^2 + \ldots + f_n^2 > 0$, la transformation définie par les formules $x' = f(x)$ transforme S en une variété S' (admettant des singularités, en général) qui ne passe pas par l'origine $O = (0, \ldots, 0)$. L'ordre du point O par rapport à la variété close S' est par définition le degré de la transformation[5]) de S' sur la sphère unité $x^2 = 1$ qui fait correspondre au point x' de S' le point $\frac{x'}{\sqrt{(x')^2}}$. Ce nombre est appelé l'indice du système de fonctions f sur la variété S, désigné par $\Omega(f)$. L'indice de la transformation de S en S' est l'indice du système $f - x$. — Si le système f est uniforme et continu non seulement sur S, mais aussi dans son intérieur, et partout $f^2 > 0$, alors $\Omega(f) = 0$.

Voici un principe général concernant les indices de deux systèmes de fonctions:

---

[4]) J. HADAMARD, *Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker* (dans le 2. volume de J. TANNÉRY, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, 2. éd. Paris, 1910), p. 437—477.

[5]) L. E. J. BROUWER, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Mathem. Annalen*, 71 (1911), p. 97—115.

Soient f et g deux systèmes de fonctions sur S. S'il existe un système de fonctions $F(f, g, \lambda)$ dépendant continuement d'un paramètre λ et tel que pour $\lambda = 0 : F \equiv f$, et pour $\lambda = 1 : F \equiv g$, ensuite pour tout $\lambda\,(0 \leqq \lambda \leqq 1) : F^2 > 0$, les indices $\Omega(f)$ et $\Omega(g)$ sont égaux. Inversement, si $\Omega(f) = \Omega(g)$, il existe un système $F(f, g, \lambda)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus.

Si pour toute valeur du paramètre $\lambda : F^2 > 0$, l'indice de F varie continuement avec λ; comme $\Omega(F)$ est un entier, il est constant; d'où la première partie de notre proposition. — Inversement, si $\Omega(f) = \Omega(g)$, les deux transformations de la variété S sur la sphère unité, définies par les formules

$$x' = \frac{f}{\sqrt{f^2}}, \quad \text{et} \quad x' = \frac{g}{\sqrt{g^2}}$$

appartiennent à la même classe, c'est-à-dire elles peuvent être déformées continuement l'une en l'autre, en vertu des théorèmes démontrés par M. BROUWER (pour $n = 2$)[6]) et M. H. HOPF (pour $n > 2$)[7]). Désignons par $t(\lambda)$ cette déformation; c'est donc un système de n fonctions $t = (t_1, \ldots, t_n)$ définies sur S, dépendant continuement de $\lambda\,(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ tel que pour tout λ et dans tout point de $S : t^2 = 1$, ensuite $t(0) \equiv \frac{f}{\sqrt{f^2}}$, et $t(1) \equiv \frac{g}{\sqrt{g^2}}$. Le système de fonctions $F = [(1-\lambda)\sqrt{f^2} + \lambda\sqrt{g^2}]$. $t(\lambda)$ vérifie toutes les conditions du théorème.

Un cas particulier important est le suivant:[8])

Théorème de POINCARÉ *et* BOHL. *Si sur la variété $S : \Omega(f) \neq \Omega(g)$, il y a au moins un point x de S pour lequel $f(x) = -\mu g(x)$ $(\mu > 0)$.*

Considérons, en effet, le système $F = (1-\lambda)f + \lambda g$; d'après la proposition ci-dessus, il existe une valeur de λ et un point de S pour lesquels $F^2 = 0$, alors $(1-\lambda)f + \lambda g = 0$, et $f(x) = -\frac{\lambda}{1-\lambda}\,g(x)$.

Une conséquence immédiate de là est le *théorème de* ROUCHÉ: *Si pour tout point de $S : f^2 > g^2$, alors $\Omega(f) = \Omega(f+g)$.*

[6]) L. E. J. BROUWER, Over één-éénduidige continue transformaties van oppervlakken in zichzelf, 5-de mededeeling, *Amsterdam Akad. Versl.*, 21 (1912), p. 300—309.

[7]) H. HOPF, Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Mathem. Annalen*, 96 (1927), p. 209—325; voir théorème II. b., p. 216.

[8]) J. HADAMARD, l. c. [4]), p. 468—469.

Supposons le contraire: $\Omega(f) \neq \Omega(f+g)$, il y aura donc un point de S pour lequel $f+g = -\mu f \, (\mu > 0)$, $g = -(1+\mu) f$, d'où $g^2 = (1+\mu)^2 . f^2 > f^2$, contrairement à notre hypothèse.

M. HADAMARD[8]) a fait observer que la proposition suivante peut être obtenue du théorème de POINCARÉ et BOHL :

Si dans tout point de $S : fg = f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n > 0$, *alors* $\Omega(f) = \Omega(g)$; *ensuite pour des nombres positifs quelconques* m *et* n, *on a* $\Omega(mf + ng) = \Omega(f)$.

Supposons que $\Omega(f) \neq \Omega(g)$; dans un point de S on aura $f = -\mu g$, $(\mu > 0)$, et par conséquent $fg = -\mu g^2 < 0$, contrairement à notre hypothèse. Ensuite si m et n désignent des nombres positifs quelconques, $(mf+ng) . f = m . f^2 + n . (fg) > 0$, et alors aussi $\Omega(mf+ng) = \Omega(f)$.

Ce dernier théorème de HADAMARD a été employé avec succès dans les recherches de M. LIPKA[9]) sur les racines des équations algébriques. Plus tard, il a été retrouvé par M. POMPEIU[10]) ; ensuite M. MONTEL[11]) a montré qu'il peut être déduit du théorème de ROUCHÉ. Dans notre représentation, le principe général ci-dessus et le théorème de POINCARÉ et BOHL apparaissent comme les sources communes de toutes ces propositions.

(Reçu le 25 mars 1935)

[9]) ST. LIPKA, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten, *ces Acta*, **5** (1931), p. 69—77.

[10]) D. POMPEIU, Sur un théorème analogue à celui de Rouché . . ., *C. R. Académie des Sciences, Paris*, **195** (1932), p. 855—857.

[11]) P. MONTEL, Sur un théorème de Rouché, *ibid.*, p. 1214—1216.