Über die Descartessche Zeichenregel.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

1. Die Vorzeichenregel von DESCARTES lautet folgenderweise: *Die Gleichung n-ten Grades mit reellen Koeffizienten*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{1}$$

hat, wenn die Reihe ihrer Koeffizienten

$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

v Zeichenwechsel aufweist, v positive Wurzeln, oder um eine gerade Anzahl weniger.

Es ist bekannt, daß die Anzahl der positiven Wurzeln genau gleich der Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten ist, wenn die Gleichung nur reelle Wurzeln hat. Die Descartessche Zeichenregel ist also in diesem Falle *genau*. LAGUERRE bestrebte die Descartessche Zeichenregel so zu verschärfen, daß sie in jedem Falle genau sei und er hat das folgende Problem aufgestellt. Man suche ein Polynom $\varphi(x)$, oder eine Potenzreihe, mit den folgenden Eigenschaften: 1. $\varphi(x)$ habe lauter positive Koeffizienten. 2. Die Koeffizientenfolge des Produktes $f(x)\,\varphi(x)$ habe so viele Zeichenwechsel wie die Anzahl der positiven Nullstellen von $f(x)$ (im Konvergenzkreise) beträgt. Mehrere Arbeiten beschäftigen sich mit der Lösung dieses Problems[1]. Wir werden auf eine, von den

---

[1]) E. LAGUERRE, *Oeuvres*, I (Paris, 1898), S. 22—25.

M. FEKETE u. G. PÓLYA, Über ein Problem von Laguerre, *Rendiconti Palermo*, **34** (1912), S. 89—120.

BÁLINT E. Vizsgálatok reális együtthatójú hatványsor reális gyökhelyeiről (ungarisch), *Math. és Term.-tud. ért.*, **31** (1913), S. 286—305.

D. R. CURTISS, Recent extensions of Descartes' rule of signs, *Annals of Math.* (2), **19** (1918), S. 251—278.

bisherigen verschiedenen Weise die Zeichenregel von DESCARTES verschärfen, indem wir den folgenden Satz beweisen:

I. *Die Gleichung* (1) *mit beliebigen reellen Koeffizienten besitzt immer eine Tschirnhaustransformierte*

$$F(y)=b_0+b_1y+\ldots+b_ny^n=0$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Die Gleichung* $F(y)=0$ *hat so viele positive Wurzeln wie die Gleichung* (1).

2. *Die Koeffizienten der Tschirnhaustransformation*

$$y=c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1} \tag{2}$$

sind reelle Zahlen.

3. *Die Koeffizientenfolge der Gleichung* $F(y)=0$ *weist so viele Zeichenwechsel auf als die Zahl ihrer positiven Wurzeln.*

Beweis. Wir werden vorläufig annehmen, daß die Wurzeln von (1) alle voneinander verschieden sind, wir werden aber diese Voraussetzung am Ende des Beweises fallen lassen. Wir werden eine solche Tschirnhaustransformation konstruieren, welche jede reelle Wurzel in sich selbst transformiert und welche die konjugierten komplexen Wurzelpaare in geeignet zu wählende konjugierte Punktpaare der Halbebene $\Re(z)<0$ überführt. Es seien die positiven Wurzeln der Gleichung (1) $p_1,\ldots,p_k$, die negativen Wurzeln $q_1,\ldots,q_l$ und die konjugiert komplexen $z_\nu, \bar{z}_\nu$ $(\nu=1,\ldots,m)$, $(k+l+2m=n,\ m\geqq 1)$. Dann gewinnt man die Koeffizienten der Tschirnhaustransformation (2) durch Auflösung des folgenden Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
p_\varkappa &= c_0+c_1p_\varkappa+c_2p_\varkappa^2+\ldots+c_{n-1}p_\varkappa^{n-1} && (\varkappa=1,2,\ldots,k)\\
q_\lambda &= c_0+c_1q_\lambda+c_2q_\lambda^2+\ldots+c_{n-1}q_\lambda^{n-1} && (\lambda=1,2,\ldots,l)\\
\xi_\nu+i\eta_\nu &= c_0+c_1z_\nu+c_2z_\nu^2+\ldots+c_{n-1}z_\nu^{n-1} && \\
\xi_\nu-i\eta_\nu &= c_0+c_1\bar{z}_\nu+c_2\bar{z}_\nu^2+\ldots+c_{n-1}\bar{z}_\nu^{n-1} && \Big\}\ (\nu=1,2,\ldots,m)
\end{aligned} \tag{3}
$$

wo ξ_ν, η_ν $(\nu=1,\ldots,m)$ reelle Werte bedeuten, welche später geeignet gewählt werden. Dieses Gleichungssystem besitzt eine und nur eine Lösung, da die Wurzeln von (1) alle voneinander verschieden sind. Offenbar ist diese Lösung reell. Die Tschirnhaustransformierte der Gleichung (1) hat die folgende Gestallt

$$F(y)=\prod_{\nu=1}^{m}\{(y-\zeta_\nu)(y-\bar{\zeta}_\nu)\}\prod_{\varkappa=1}^{k}(y-p_\varkappa)\prod_{\lambda=1}^{l}(y-q_\lambda)=0, \tag{4}$$

wobei $\zeta_\nu=\xi_\nu+i\eta_\nu$.

Wir betrachten in (4) das Produkt der zwei ersten Faktoren:

(5) $$F^*(y) = \prod_{\nu=1}^{m} \{(y-\xi_\nu)^2 + \eta_\nu^2\} \prod_{\varkappa=1}^{k} (y-p_\varkappa) = 0.$$

Ordnen wir das Polynom $F^*(y)$ nach Potenzen von y, so wird

(5') $$F^*(y) = y^{k+2m} + \alpha_1 y^{k+2m-1} + \ldots + \alpha_i y^{k+2m-i} + \ldots + \alpha_{k+2m}.$$

Der Koeffizient α_i $(i = 1, \ldots, k+2m)$ ist ein Polynom der Werte

$$\xi_1, \ldots, \xi_m, \ \eta_1, \ldots, \eta_m, \ p_1, \ldots, p_k.$$

Vorläufig seien $\xi_1, \ldots, \xi_m$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$ unabhängige Variablen, und zerlegen wir das Polynom α_i in zwei Teile

(6) $$\alpha_i = \alpha_i' + \alpha_i'' \qquad (i = 1, \ldots, k+2m).$$

α_i' bedeute die Summe derjenigen Glieder von α_i, welche keine von den Veränderlichen $\eta_1, \ldots, \eta_m$ enthalten, also ist α_i' ein Polynom der Veränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Dann wird α_i'' — falls es nicht identisch verschwindet — ein solches Polynom von $\xi_1, \ldots, \xi_m$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$, daß jedes Glied desselben mindestens eine der Veränderlichen $\eta_1, \ldots, \eta_m$ enthält. Die Gleichung (5) geht nach (5') und (6) in

$$y^{k+2m} + (\alpha_1' + \alpha_1'')\, y^{k+2m-1} + \ldots + (\alpha_{k+2m}' + \alpha_{k+2m}'') = 0$$

über. Wir behaupten, daß keine der Funktionen $\alpha_1', \ldots, \alpha_{k+2m}'$ identisch verschwindet. Man gewinnt nämlich α_i', wenn man in (5) $\eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \ldots, \eta_m = 0$ einsetzt und dann in der Gleichung

(7) $$F_*(y) = \prod_{\nu=1}^{m} (y-\xi_\nu)^2 \prod_{\varkappa=1}^{k} (y-p_\varkappa) = 0$$

den Koeffizienten von y^{k+2m-i} bestimmt. Dieser ist aber gleich der Summe der Kombinationen i-ter Ordnung, gebildet von

$$\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \ldots, \xi_m, \xi_m, p_1, \ldots, p_k.$$

Also ist entweder α_i', oder $-\alpha_i'$ ein Polynom der Veränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_m$ mit *positiven* Koeffizienten. Also kann α_i' nicht identisch verschwinden, und so existiert nach einem bekannten Satze[2]) ein solches Wertsystem $\xi_1, \ldots, \xi_m$, für welche

$$\alpha_i' \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, k+2m)$$

und

$$\xi_\nu < 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, m)$$

---

[2]) s. z. B. R. Fricke, *Lehrbuch der Algebra*, I (Braunschweig, 1924), S. 96.

ist. In diesem Falle ist die Anzahl der positiven Wurzeln von (7) gleich k. Die Gleichung (7) hat aber lauter reelle Wurzeln, also die Reihe ihrer Koeffizienten

$$(8) \qquad 1, \alpha_1', \ldots, \alpha_{k+2m}'$$

weist genau k Zeichenwechsel auf.

Wählt man nun die Werte der Veränderlichen $\eta_1, \ldots, \eta_m$ genügend klein, so werden auch die Werte

$$\alpha_1'', \ldots, \alpha_{k+2m}''$$

beliebig klein, da jedes Glied von α_i'' mindestens eine der Veränderlichen $\eta_1, \ldots, \eta_m$ enthält (wenn $\alpha_i'' \neq 0$ ist). Da alle $\alpha_i' \neq 0$ ist, so folgt nach (6), daß die Reihe

$$1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k+2m}$$

so viele Zeichenwechsel aufweist wie die Reihe (8). Also hat die Koeffizientenreihe von $F^*(y)$ so viel Zeichenwechsel als die Anzahl der positiven Nullstellen von $F^*(y)$ ist.

Jetzt werden wir beweisen, daß — unter den vorigen Bedingungen betreffend die Werte $\xi_1, \ldots, \xi_m$ und $\eta_1, \ldots, \eta_m$ — die Anzahl der Zeichenwechsel von (4) genau gleich der Zahl der positiven Wurzeln von (4) ist. Der Beweis geht durch wiederholte Anwendung des folgenden Lemmas:[3])

Ist p eine positive Zahl und sind die Koeffizienten des Polynoms $\psi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ reelle Zahlen, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel des Polynoms $(x+p)\psi(x)$ nicht größer als die Anzahl der Zeichenwechsel von $\psi(x)$.

Man multipliziere das Polynom $F^*(y)$ nacheinander mit den Faktoren: $(y-q_1), (y-q_2), \ldots, (y-q_l)$, so gewinnt man das Polynom $F(y)$. Nun ist aber $q_1 < 0, \ldots, q_l < 0$, also folgt durch wiederholte Anwendung des vorigen Lemmas, daß die Anzahl der Zeichenwechsel von $F(y$ nicht größer ist als die von $F^*(y)$, also nicht größer als k. Andererseits ist diese Anzahl nach der Descartesschen Zeichenregel mindestens k; daher ist die Anzahl der Zeichenwechsel von $F(y)$ gleich k, w. z. b. w.

Wir haben bei dem Beweis vorausgesetzt, daß die Wurzeln der Gleichung (1) alle voneinander verschieden sind. Wenn dies nicht der Fall ist, können wir es durch eine kleine Veränderung

---

[3]) s. z. B. Pólya—Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, II (Berlin, 1925), S. 38, Aufgabe 4.

der Werte $p_\varkappa, q_\lambda, z_\nu, \overline{z}_\nu$, leicht erreichen. Diese veränderten Werte bezeichnen wir mit $p'_\varkappa, q'_\lambda, z'_\nu, \overline{z}'_\nu$. Setzen wir in der rechten Seite von (3) statt $p_\varkappa, q_\lambda, z_\nu, \overline{z}_\nu$, die Werte $p'_\varkappa, q'_\lambda, z'_\nu, \overline{z}'_\nu$ ein, dann bestimmt dieses Gleichungssystem die Koeffizienten einer Tschirnhaustransformation von (1). Die so bestimmte Tschirnhaustransformation wird die Wurzeln von (1) in solche Werte überführen, die von $p_\varkappa, q_\lambda, (\xi_\nu \pm i\eta_\nu)$ nur beliebig wenig abweichen. Infolgedessen werden diese Werte den nötigen Bedingungen noch genügen.

2. Wir haben in dem vorigen Paragraphen bewiesen, daß jede Gleichung mit reellen Koeffizienten eine Tschirnhaustransformierte besitzt mit den folgenden beiden Eigenschaften: 1. Die transformierte Gleichung hat so viele positive Wurzeln als die Anzahl der positiven Wurzeln der ursprünglichen Gleichung ist. 2. Die transformierte Gleichung hat so viele positive Wurzeln als die Anzahl der Zeichenwechsel in ihrer Koeffizientenreihe ist. Aus dem Beweise geht sogleich hervor, daß es unendlich viele solche Tschirnhaustransformierte gibt. Unser nächster Zweck ist eine solche Tschirnhaustransformierte effektiv zu konstruieren. Dazu beweisen wir zuerst die folgende Ergänzung der Descartesschen Zeichenregel.

II. *Der Grad der Gleichung* (1) *sei fest. Die positiven Wurzeln von* (1) *sollen alle in dem Intervalle* (a, b) *liegen* $(0 < a < b)$. *Die komplexen Wurzeln sollen alle in einem solchen Kreise vom Radius* ϱ *liegen, welcher vollständig in die Halbebene* $\Re(z) < 0$ *fällt. Der Mittelpunkt dieses Kreises habe von dem Nullpunkt einen Abstand d welcher der Ungleichung*

$$d > \Omega(a, b)$$

genügt; es sei ferner

$$\varrho < \varepsilon(d, b). \tag{9}$$

Wir behaupten, daß die Gleichung bei diesen Bedingungen ebenso viele positive Wurzeln hat als die Anzahl der Zeichenwechsel ist.

Dieser Satz besagt, daß die Zeichenregel von Descartes genau ist in dem Falle, wo sämtliche komplexe Wurzeln in einem solchen Kreise liegen, welcher genügend weit in der Halbebene $\Re(z) < 0$ liegt und einen genügend kleinen Radius hat. Der Beweis dieses Satzes hängt eng mit den Überlegungen des vorigen Paragraphen zusammen. Wir betrachten die Koeffizienten des Polynoms (7). Diese sind Funktionen der Veränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_m$.

Bedeute ξ eine solche negative Zahl, welche einen genügend großen absoluten Betrag besitzt. Wir beweisen, daß keiner der Koeffizienten von (7) gleich Null ist, wenn nur

$$(10) \qquad |\xi_1 - \xi| < \delta, \ldots, |\xi_m - \xi| < \delta$$

gilt, wo δ eine genügend kleine positive Zahl bedeutet. Wir berechnen die Werte der Koeffizienten von (7) an der Stelle $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \xi, \ldots, \xi_m = \xi$. Man gewinnt diese Werte als Koeffizienten des Polynoms

$$(11) \qquad \underset{(\xi_1 = \ldots = \xi_m = \xi)}{F_*(y)} = (y - \xi)^{2m} \prod_{\varkappa=1}^{k} (y - p_\varkappa).$$

Es sei noch

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} (y - p_\varkappa) = b_0 + b_1 y + \ldots + y^k$$

und

$$\xi = -\zeta, \quad \zeta > 0.$$

Dann folgt nach (11) für die erwähnten Werte der Koeffizienten die Formel

$$(12) \qquad \begin{gathered} j!\, b_j \zeta^{2m} + j!\, 2m b_{j-1} \zeta^{2m-1} + \frac{j!}{2} 2m(2m-1) b_{j-2} \zeta^{2m-2} + \ldots + \\ + 2m(2m-1) \ldots (2m-j+1) b_0 \zeta^{2m-j} \\ (j = 0, 1, \ldots, k+2m, \ b_j = 0 \text{ wenn } j > k). \end{gathered}$$

Da $b_0 \neq 0$, $b_1 \neq 0, \ldots, b_k \neq 0$, so ergibt sich leicht, daß keines von den Polynomen (12) identisch verschwindet. Ist also $\zeta = |\xi|$ genügend groß, so sind alle Koeffizienten von (7) an der Stelle $\xi = \xi_1 = \ldots = \xi_m$ von Null verschieden. Da die Koeffizienten von (7) stetige Funktionen der Veränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sind, so folgt, daß diese Koeffizienten in der kleinen Umgebung (10) auch von Null verschieden sind. Es folgt also endlich, da die imaginären Teile der komplexen Wurzeln nach Voraussetzung genüged klein sind, daß man die Überlegungen des vorigen Paragraphen wörtlich wiederholen kann; damit ist der Satz II bewiesen.

Bei dem Beweise des Satzes II war die Tatsache wesentlich, daß die Koeffizienten des Polynoms (7) an einer Stelle $\xi = \xi_1 = \ldots = \xi_m$ alle von Null verschieden sind. Man könnte dies so erreichen, daß man den Wert von $\zeta = |\xi|$ größer als alle positive Nullstellen der Polynome (12) wählt. Die Koeffizienten der Polynome (12) sind einfache rationale symmetrische Funktionen der positiven

Wurzeln der Gleichung (1). Da die positiven Wurzeln von (1) im Intervalle (a, b) liegen, also ergibt sich für die Koeffizienten von (12) eine obere und eine untere Schranke, welche nur von den Zahlen a, b abhängt. Damit wird die obere Schranke der positiven Nullstellen von (12) eine Zahl $\Omega(a, b)$. Eine leichte Überlegung zeigt, daß die Zahl ε in (9) eine Funktion von d, b ist, da die Werte $\alpha'_\nu, \alpha''_\nu$ von $\xi_\nu, \eta_\nu, p_\varkappa$ abhängen und d eine obere Schranke für $|\xi_\nu|$ bestimmt.

3. Nunmehr können wir eine solche rationale Transformation (sogar auch eine Tschirnhaustransformation) angeben, welche die Gleichung (1) in eine solche transformiert die den Bedingungen vom Satze II genügt, außerdem die transformierte Gleichung und die Gleichung (1) gleichviele positive Wurzeln haben. — Wir werden einen solchen Streifen

$$-2\delta < \Re(z) < 0 \qquad (z = x + iy)$$

bestimmen, welcher in seinem Inneren keine Nullstelle von $f(x)$ enthält. Wir setzen in das Polynom $f(x)$ statt x die Veränderliche $z = x + iy$ ein, so wird

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Eliminieren wir y aus den Gleichungen $u(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$, so ergibt sich eine Gleichung $h(x) = 0$. Es läßt sich leicht ein solches Intervall

$$-2\delta < x < 0 \qquad (\delta > 0)$$

angeben, in welchem $h(x) = 0$ keine negative Wurzel hat. Das Polynom $f(z)$ wird sicher in dem Streifen

$$-2\delta < \Re(z) < 0$$

keine Nullstellen enthalten. Wenden wir nun auf $f(z)$ die folgende Tschirnhaustransformation:

$$z' = z + \delta$$

an, so hat die transformierte Gleichung keine Wurzel in dem Streifen

(13) $$-\delta < \Re(z) < \delta.$$

Mann kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß sämtliche Wurzeln von (1) im Inneren des Einheitskreises liegen. Es bedeute

(14) $$\left.\begin{array}{c} -\eta < \Im(z) < \eta \\ \delta < \Re(z) \end{array}\right\} \qquad (\eta > 0)$$

einen solchen Halbstreifen, welcher nur die positiven Wurzeln von $f(z)$ enthält. Nun lassen wir aus dem Einheitskreise die Streifen (13) und (14) aus, und bezeichnen mit E^* den übrigbleibenden Teil des Einheitskreises. Wir werden ein Polynom $g(z)$ angeben mit den beiden folgenden Eigenschaften:

1°. $$0 < g(z) < 1$$

wenn $\delta < z < 1$ ist.

2°. Liegt z im Inneren von E^*, dann ist

$$|g(z)| > G$$

wo G eine beliebig große, gegebene positive Zahl bedeutet.

Wir betrachten die folgende ganze Funktion

$$\psi(z) = \frac{1}{2}(\cos^2 kz + e^{-lz})$$

wo k und l geeignet zu wählende positive Zahlen bedeuten. Ist l genügend groß, so gilt

$$0 < \varepsilon < \psi(z) < 1 - \varepsilon \tag{15}$$

wenn z positiv ist und in dem Intervalle

$$\delta < z < 1$$

liegt. Liegt z in E^*, so gilt für $\Re(z) > 0$

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &\geqq \frac{1}{2}(|\cos^2 kz| - |e^{-lz}|) = \\ &= \frac{1}{8}(e^{2ky} + e^{-2ky} + 2\cos 2kx) - \frac{1}{2e^{lx}} > \\ &> \frac{1}{8}(e^{2k\eta} + 2\cos 2kx) - \frac{1}{2e^{lx}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Wählt man nun k genüged groß, so folgt nach (16)

$$\begin{gathered} |\psi(z)| > G \\ (z \in E^*, \ \Re(z) > 0). \end{gathered} \tag{17}$$

Wenn z im E^* liegt und $\Re(z) < 0$ ist, so gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &\geqq \frac{1}{2}(|e^{-lz}| - |\cos^2 kz|) = \\ &= \frac{1}{2}e^{-xl} - \frac{1}{8}(e^{2ky} + e^{-2ky} + 2\cos 2kx) \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2}e^{\delta l} - \frac{1}{8}(e^{2ky} + e^{-2ky} + 2\cos 2kx). \end{aligned} \tag{18}$$

Ist l genügend groß, so folgt nach (18)

$$|\psi(z)| > G \quad (z \in E^*, \Re(z) < 0). \tag{19}$$

Nun bedeute $g(z)$ einen Abschnitt der Potenzreihe von $\psi(z)$ von genügend hohem Grad. Dann folgt nach (15), (17), (19), daß das Polynom $g(z)$ die obigen Eigenschaften 1^0, 2^0 besitzt.

Jetzt schreiben wir $g(x)$ statt $g(z)$ und wenden für die Wurzeln der Gleichung (1) die folgende rationale Transformation

$$t(x) = \frac{1}{g(x)}$$

an. Diese Transformation führt die positiven Wurzeln von (1), welcher sämtlich im Intervall (a, b) liegen, in solche Werte über, die in einem Intervall (a', b') liegen, für welches $1 < a' < b'$ gilt. Dies folgt nach Eigenschaft 1^0 von $g(x)$. Diese Transformation wird die anderen Wurzeln von (1) in das Innere eines beliebig kleinen Kreises überführen, welcher den Mittelpunkt in $t = 0$ hat. Dies folgt nach Eigenschaft 2^0 von $g(x)$. Jetzt wenden wir für $t(x)$ die folgende lineare Transformation an:

$$t' = \frac{2\lambda t + 1 - 2\lambda}{\lambda t + 1 - \lambda} = \frac{(1-2\lambda)\, g(x) + 2\lambda}{(1-\lambda)\, g(x) + \lambda},$$

wo $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ ist. Diese rationale Transformation in x führt dann die positiven Wurzeln (1) in das Intervall (1, 2) über. Die anderen Wurzeln gehen in das Innere eines beliebig kleinen Kreises über, welcher den Mittelpunkt auf der negativen reellen Achse hat. Dieser letztere Kreis wird passend weit von dem Nullpunkt liegen, wenn $(1-\lambda)$ genügend klein ist. Also führt die Transformation $t'(x)$ die konjugiert komplexen Wurzeln von (1) in einen genügend kleinen Kreis über, welcher den Bedingungen des Satzes II genügt.

(Eingegangen am 23. Februar 1935.)