Einige Sätze über topologische Flächenabbildungen.

Von JAKOB NIELSEN in Kopenhagen.

(Aus einem Briefe an Herrn B. v. KERÉKJÁRTÓ)

Satz I: *Eine topologische Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ auf sich, die jede einfache geschlossene Kurve homotop transformiert, gehört zur Klasse der Identität.*

Beweis. Sei φ die Fläche vom Geschlecht $p (> 1)$, $a_1, b_1; \ldots, a_p, b_p$ mit der Relation $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1$ ein kanonisches Schnittsystem. Sei Φ die universelle Überlagerungsfläche, dargestellt durch die hyperbolische Ebene, die konform auf das Innere eines Kreises E abgebildet sei. Sei $\tau\varphi$ die gegebene Abbildung und $t\Phi$ irgend eine überlagernde Abbildung von Φ. Bei dem zugehörigen Automorphismus J der Fundamentalgruppe F gilt dann wegen der Erhaltung der Homotopie $a_1 \to f_1 a_1 f_1^{-1}$, wobei f_1 ein gewisses Element von F ist. Wir ersetzen dann $t\Phi$ durch $f_1^{-1} t\Phi = t_1 \Phi$, welches ebenfalls $\tau\varphi$ überlagert, und haben bei dem zugehörigen Automorphismus $J_1 : a_1 \to a_1$; also endigt die Achse des Elementes a_1 in Fixpunkten von $t_1 E$. Für b_1 gilt bei $J_1 : b_1 \to f_2 b_1 f_2^{-1}$ für ein gewisses f_2 aus F. Da aber das Bild der Achse von b_1 notwendig die Achse von a_1 schneiden muß, kommt für f_2 nur eine Potenz a_1^m in Frage. Wir ersetzen dann weiter t_1 durch $t_2 = a_1^{-m} t_1$ und haben bei dem zugehörigen Automorphismus $J_2 : a_1 \to a_1$, $b_1 \to b_1$, also $k_1 \to k_1$, wobei $k_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ gesetzt ist. Die Achsen von b_1 und k_1 liegen wie in Fig. 1, und ihre Endpunkte sind Fixpunkte bei $t_2 E$. Nun ersetzen wir die übrigen $2(p-1)$ Erzeugenden $a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$ durch die Erzeugenden

$$\begin{aligned} a'_\nu &= a_1^{-1} a_\nu^{-1} \\ b'_\nu &= a_1^{-1} b_\nu \end{aligned} \qquad \nu = 2, 3, \ldots, p,$$

indem diese Elemente a'_ν, b'_ν wieder Kurventypen ohne Doppelpunkte entsprechen. Die Achsen dieser Elemente in Φ verlaufen alle so, daß sie auf dem Teilbogen i von E beginnen und auf dem Teilbogen j endigen. (s. Fig. 1.) Wenn nun die Endpunkte der Achse beispielsweise von a'_2 nicht Fixpunkte von $t_2 E$ wären, so müßte beim unbegrenzten Iterieren der Abbildung $t_2(\Phi + E)$ der Anfangspunkt gegen einen Punkt X des (abgeschlossenen) Bogens i und der Endpunkt gegen einen Punkt Y des Bogens j

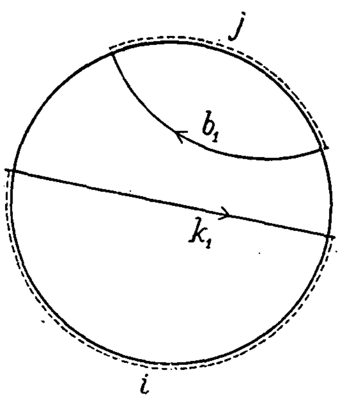

Fig. 1.

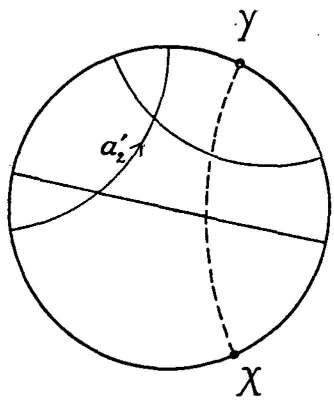

Fig. 2.

konvergieren, die Achsen der Elementfolge a'_2, $(a'_2)_{J_2}$, $(a'_2)_{J_2^2}, \ldots$, die a'_2 bei J_2 und seinen Potenzen entspricht, müßten also gegen den zu E orthogonalen Kreisbogen XY konvergieren und andererseits bezüglich F äquivalent sein, weil der zugehörige Kurventypus auf φ homotop transformiert wird. (s. Fig. 2.) *Das ist unmöglich, weil sich äquivalente Achsen im Inneren von Φ nicht häufen.* Also hat man bei J_2 auch $a'_2 \to a'_2, \ldots, b'_p \to b'_p$. Dann läßt aber J_2 ein Erzeugendensystem der Gruppe F fest und ist daher der identische Automorphismus, womit die Behauptung bewiesen ist.

B e m e r k u n g. Daß es nicht etwa genügt, die Erhaltung des Homotopiecharakters nur für die Kurven eines kanonischen Schnittsystems vorauszusetzen, zeigt der schon für $p = 2$ mit der obigen Bedeutung von k_1 zu bildende Automorphismus

$$a_1 \to a_1,\ b_1 \to b_1,\ a_2 \to k_1 a_2 k_1^{-1},\ b_2 \to k_1 b_2 k_1^{-1},$$

dem nicht die Abbildungsklasse der Identität entspricht.

Satz II: *Unter allen geschlossenen orientierbaren Flächen hat nur der Torus die Eigenschaft, solche topologischen Selbstabbildungen zuzulassen, die mit allen Potenzen fixpunktfrei sind. Unter den ersten $2p$ Potenzen einer indikatrixerhaltenden topologischen Selbstabbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht $p > 1$ hat mindestens eine einen Fixpunkt.*

Beweis. Daß der Torus Abbildungen der genannten Art zuläßt, ist klar. Da die geraden Potenzen einer indikatrixumkehrenden Abbildung indikatrixerhaltend sind, beschränken wir uns auf die letzteren. Dann haben die Abbildungen der Kugel nach dem Satz von BROUWER stets Fixpunkte. Man hat also den letzten Teil des obigen Satzes zu beweisen, und hierzu kommt man mit der Formel von J. W. ALEXANDER aus, wie folgende einfache Überlegung zeigt.

Es sei φ eine geschlossene Fläche vom Geschlecht $p > 1$, $\tau\varphi$ eine topologische indikatrixerhaltende Selbstabbildung, J ein Automorphismus aus der zu τ gehörigen Automorphismenfamilie, der mittels des in Satz I benutzten Erzeugendensystems ausgedrückt sei, Γ die zu J gehörige Exponentensummenmatrix aus $2p$ Zeilen und Spalten, E_{2p} die entsprechende Einheitsmatrix, s_r die Spur von Γ^r und

$$|\Gamma - \lambda E_{2p}| = \lambda^{2p} + a_1\lambda^{2p-1} + a_2\lambda^{2p-2} + \ldots + a_{2p-1}\lambda + a_{2p} = \gamma(\lambda)$$

das Polynom, dessen Wurzeln die Eigenwerte von Γ sind. Dann ist s_r die Summe der r-ten Potenzen der Wurzeln von $\gamma(\lambda)$, also in bekannter Weise mit den Koeffizienten verbunden:

$$\begin{array}{ll}
(1) & s_1 + a_1 = 0 \\
(2) & s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \\
(3) & s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \\
(4) & s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4a_4 = 0 \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(2p) & s_{2p} + a_1 s_{2p-1} + a_2 s_{2p-2} + \ldots + a_{2p-1} s_1 + 2p\, a_{2p} = 0
\end{array}$$

und weiter für $m = 1, 2, \ldots$

$$(2p+m) \qquad s_{2p+m} + a_1 s_{2p+m-1} + \ldots + a_{2p} s_m = 0.$$

Nun hat die Summe der Indizes der Fixpunkte von τ^r nach ALEXANDER den Wert $2 - s_r$. Als notwendige Bedingung dafür, daß τ^r fixpunktfrei ist, hat man daher $s_r = 2$. Angenommen nun, $s_1, s_2, \ldots, s_{2p}$ hätten alle den Wert 2, so folgt der Reihe nach

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = -2 & & \text{aus (1)} \\
a_2 = 1 & & \text{aus (2)} \\
a_3 = 0 & & \text{aus (3)} \\
a_4 = 0 & & \text{aus (4)} \\
\cdots & & \cdots \\
a_{2p} = 0 & & \text{aus } (2p).
\end{array}
$$

a_{2p} ist aber die Determinante von Γ und hat bekanntlich den Wert $+1$; und a_{2p} ist nicht a_2, da $p > 1$ vorausgesetzt wurde. Hieraus folgt die Behauptung.

Zusatz. Wenn eine Potenz von τ zur Abbildungsklasse der Identität gehört, so kommt schon unter den ersten $2p-2$ Potenzen von τ mindestens eine vor, die Fixpunkte hat.

Denn wenn eine Potenz τ^n zur Klasse der Identität gehört, ist $\Gamma^n = E_{2p}$. Folglich sind die Wurzeln von $\gamma(\lambda)$ Einheitswurzeln, also entweder ± 1 oder paarweise konjugiert komplex und damit zugleich zu einander reziprok. Die Koeffizienten von $\gamma(\lambda)$ erfüllen dann die Bedingung $a_q = a_{2p-q}$ für $q = 1, 2, \ldots$ Wäre nun $s_1 = s_2 = \ldots = s_{2p-2} = 2$, so ergäbe sich in derselben Weise wie oben $a_2 = 1$, $a_{2p-2} = 0$ im Widerspruch zur Reziprozitätsbedingung.

Bemerkung. Durch Ausnutzung dieser algebraischen Hilfsmittel lassen sich Abschätzungen dieser Art leicht weitertreiben, worauf ich hier nicht näher eingehe. Ich weise nur auf den Zusammenhang mit meiner im Band 58 der *Acta Mathematica* enthaltenen Abhandlung hin. Für Abbildungsklassen endlicher Ordnung ergeben sich dabei z. B. Abschätzungen der Ordnung in Übereinstimmung mit den Abschätzungen, die man für die Ordnungen birationaler Transformationen einer algebraischen Riemannschen Fläche von einem Geschlecht größer als 1 kennt. Abschätzungen der letztgenannten Art und explizite Ordnungsbestimmungen lassen sich also mit rein topologischen Mitteln erreichen, ohne daß man auf die Struktur der Riemannschen Fläche einzugehen braucht.

Satz III: *Die mit allen Potenzen fixpunktfreien, indikatrixerhaltenden topologischen Selbstabbildungen eines Torus zerfallen in unendlichviele Abbildungsklassen.*

Beweis. Aus dem Beweis von Satz II ergibt sich, daß diese Abbildungen den Werten $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, also dem charakteristischen Polynom

$$\gamma(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

entsprechen müssen. Es sei

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

eine Matrix dieser Art. Dabei hat man die vier ganzen Zahlen a, b, c, d so zu wählen, daß $-bc$ eine Quadratzahl und $a = 1 \pm \sqrt{-bc}$, $d = 1 \mp \sqrt{-bc}$ ist. Dann ist $a + d = 2$ und $ad - bc = 1$. Die Matrix Γ erfüllt die dem charakteristischen Polynom entsprechende Gleichung

$$(1) \qquad (\Gamma - E)^2 = 0, \qquad E = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

die man in

$$\Gamma^2 - E = 2(\Gamma - E)$$

umformt und durch vollständige Induktion zu

$$(2) \qquad \Gamma^n - E = n(\Gamma - E)$$

erweitert.

Nun betrachte man in der xy-Ebene die Transformation

$$(t) \qquad \begin{aligned} x &\to ax + cy + \alpha, \\ y &\to bx + dy + \beta. \end{aligned}$$

Wenn man diese iteriert, so erhält man in Matrizenschreibweise

$$\begin{aligned} \{x \;\; y\} &\to \{x \;\; y\}\,\Gamma + \{\alpha \;\; \beta\}\,E \\ &\to \{x \;\; y\}\,\Gamma^2 + \{\alpha \;\; \beta\}\,(\Gamma + E) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\to \{x \;\; y\}\,\Gamma^n + \{\alpha \;\; \beta\}\,(\Gamma^{n-1} + \Gamma^{n-2} + \ldots + \Gamma + E). \end{aligned}$$

Unter Benutzung von (2) hat man also, wenn man den Bildpunkt von x, y bei t^n mit x_n, y_n bezeichnet, für t^n die Darstellung

$$(t^n) \quad \{x_n \;\; y_n\} = \{x \;\; y\}[n(\Gamma - E) + E] + \{\alpha \;\; \beta\}\left[\frac{n(n-1)}{2}(\Gamma - E) + nE\right].$$

Setzt man

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_n &= x + p, \\ y_n &= y + q, \end{aligned}$$

wobei die Größen p und q von x, y und n abhängen, so erhält man aus (t^n)

$$(4) \quad \{p \;\; q\} - n\{\alpha \;\; \beta\} = \left[n\{x \;\; y\} + \frac{n(n-1)}{2}\{\alpha \;\; \beta\}\right](\Gamma - E).$$

Wegen (1) hat nun $\Gamma - E$ die Determinante 0; es gibt also zwei nicht beide verschwindende ganze Zahlen r und s derart, daß

$$(\Gamma - E) \begin{Bmatrix} r \\ s \end{Bmatrix} = 0.$$

Also erhält man aus (4)

$$(5) \qquad 0 = \{p - n\alpha \quad q - n\beta\} \begin{Bmatrix} r \\ s \end{Bmatrix} = rp + sq - n(r\alpha + s\beta).$$

Wenn man nun die in der Transformation *(t)* verfügbaren Konstanten α und β so wählt, daß α, β und 1 rational unabhängig sind, so können p und q in (5) für kein $n \neq 0$ zugleich ganz sein. Auf dem aus der xy-Ebene modulo 1 gebildeten Torus stellt also t eine topologische indikatrixerhaltende Transformation dar, die wegen (3) mit allen Potenzen fixpunktfrei ist. Jeder neuen Wahl von Γ in Übereinstimmung mit den oben genannten Bedingungen entspricht dabei eine neue Abbildungsklasse.

Bemerkung. Ist $\Gamma \neq E$, so zeigt (2), daß in Γ^n mit wachsendem n Zahlen von beliebig großen absoluten Beträgen vorkommen. Folglich wird mindestens eine der beiden auf dem Torus geschlossenen Kurven $0 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$ und $x = 0$, $0 \leqq y \leqq 1$ durch die Potenzen der Abbildung auf Bildkurven abgebildet, deren Längen mit wachsendem Exponenten unbegrenzt steigen. Durch die von Ihnen im Band **7** der *Acta Sc. Math.*, Szeged, S. 70 benutzte Schlußweise ergibt sich dann, daß die Abbildung nicht regulär sein kann. Für Abbildungen, die mit allen Potenzen fixpunktfrei und überdies regulär sein sollen, muß somit Γ die Einheitsmatrix sein in Übereinstimmung mit Ihrem Satz l. c., S. 76.

(Eingegangen am 4. Juni 1935.)