Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome.

Von GÉZA GRÜNWALD in Szeged.

Einleitung.

PAUL DU BOIS REYMOND hat das erste Beispiel einer stetigen (und nach 2π periodischen) Funktion angegeben, deren Fouriersche Reihe an *gewissen* Stellen divergiert[1]). Einfachere Beispiele stammen von SCHWARZ[2]) und LEBESGUE[3]). Die einfachsten, explizite angegebenen, Funktionen dieser Art hat FEJÉR konstruiert[4]).

---

[1]) P. DU BOIS-REYMOND, Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln, *Abhandlungen der math.-phys. Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften,* **12** (1876), II. Abt., S. I—XXIV und 1—102. NEDER wies darauf hin, daß die du Bois-Reymondsche Konstruktion einer stetigen Funktion, deren Fourierreihe *überall dicht* divergiert, nicht stichhaltig ist (L. NEDER, Über stetige Funktionen mit überalldicht divergierender Fourierreihe, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* **30** (1921), S. 153—155), so daß das erste Beispiel einer solchen Funktion von FEJÉR stammt.

[2]) Das Schwarzsche Beispiel steht bei A. SACHSE, Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen, *Zeitschrift für Math. und Phys.,* **25** (1880), Historisch-literarische Abt., Supplementheft, S. 229—276, insbesondere S. 271.

[3]) H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, 1906), S. 84—89.

[4]) L. FEJÉR, *a)* Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe, *Journal für die reine und angewandte Math.,* 137 (1909), S. 1—5; *b)* Eine stetige Funktion deren Fouriersche Reihe divergiert, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo,* **28** (1909), S. 402—404; *c)* Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, *Journal für die reine und angewandte Math.,* **138** (1910), S. 22—53; *d)* Sur les singularités des séries de Fourier de fonctions continues, *Annales de l'École Normale Supérieure,* (3) **28** (1911), S. 63—103.

Bei der Konstruktion stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe spielen nach einer wichtigen Bemerkung von LEBESGUE die Größen

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin (n + {}^1/_2) t}{\sin {}^t/_2} \right| dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine entscheidende Rolle; man nennt diese Größen die *Lebesguesschen Konstanten.* FEJÉR hat gezeigt[5]), daß dieselben wie $\log n$ ins unendliche wachsen; genauer, daß

$$\text{(1)} \qquad \frac{\varrho_n}{\log n} \to \frac{4}{\pi^2} \qquad (n \to \infty).$$

Man kennt auch stetige Funktionen, deren Fourierreihe an *unendlich vielen* Stellen divergiert (und zwar so, daß die Partialsummen nicht beschränkt sind); man kann sogar *abzählbar unendlich viele Divergenzstellen* (bzw. Unbeschränktheitsstellen) *beliebig vorschreiben* (s. die unter [4]) angeführten Arbeiten von FEJÉR). Solche Funktionen kann man, unter Benutzung der Relation (1), auch mit Hilfe der bekannten Methoden zur Verdichtung der Singularitäten[6]) konstruieren. STEINHAUS hat gezeigt[7]), daß sobald die Menge der Unbeschränktheitsstellen der Fourierreihe einer stetigen Funktion überall dicht liegt, dann besitzt sie sogar in jedem Intervall die *Mächtigkeit des Kontinuums.* Von NEDER stammt schließlich ein Beispiel einer stetigen Funktion, deren Fourierreihe auf einer Punktmenge divergiert, die *perfekt* (also ebenfalls von der Mächtigkeit des Kontinuums) und *nirgends dicht* ist[8]). Die Frage, ob es eine stetige Funktion gibt, deren Fourierreihe *überall,* oder wenigstens *auf einer Menge von positivem Maß* divergiert, blieb aber bisher ungelöst.

Die Partialsummen der Fourierreihe stehen in weitgehender Analogie mit den zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörigen

---

[5]) a. a. O. [4]) *c).*

[6]) Vgl. z. B. S. BANACH und H. STEINHAUS, Sur le principe de la condensation de singularités, *Fundamenta Math.,* 9 (1927), S. 50–61.

[7]) S. in der Dissertation von L. NEDER, *Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen, einschließlich Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise* (Göttingen, 1919), S. 26.

[8]) a. a. O. [7]).

Lagrangeschen Interpolationspolynomen[9]). Diese Abszissen sind

(2) $$x_k^{(n)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

die Nullstellen des Tschebyscheffschen Polynoms n-ter Ordnung

(3) $$T_n(x) = \cos(n \arc\cos x).$$

Falls kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir bei $x_k^{(n)}$ (und auch bei den entsprechenden weiter unten zu definierenden Ausdrücken) die oberen Indizes fortlassen. Auch schreiben wir x_k in der Form

$$x_k = \cos\vartheta_k, \quad \vartheta_k = \vartheta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi.$$

Es ist offenbar $1 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > -1$.

Es sei

(4) $$l_k(x) = l_k^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(x-x_k)\,T_n'(x_k)} = (-1)^{k+1}\frac{\sin\vartheta_k}{n}\,\frac{T_n(x)}{x-x_k};$$

ist dann $f(x)$ eine im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ definierte Funktion, so liefert die Lagrangesche Interpolationsformel

(5) $$L_n(x) = L_n[f(x)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x)$$

dasjenige Polynom vom höchstens $(n-1)$-ten Grade, welches an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Die Polynomfolge

(6) $$L_1[f(x)],\ L_2[f(x)], \ldots,\ L_n[f(x)], \ldots$$

nennen wir die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige (Lagrangesche) Interpolationsfolge von $f(x)$.

In der Untersuchung der Divergenzmöglichkeiten der Folge (6) spielen die Funktionen

(7) $$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|$$

dieselbe Rolle, wie die Lebesgueschen Konstanten bei der analo-

---

[9]) Wegen dieser Analogie haben einige Forscher die Fouriersche Reihe und die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige Lagrangesche Interpolation parallel untersucht. S. z. B. G. Faber, Über stetige Funktionen (zweite Abhandlung), *Math. Annalen*, 69 (1910), S. 372—443, insb. § 9, wo interessante Tatsachen über die Frage der Äquikonvergenz bewiesen werden.

gen Frage für Fourierreihen. In § 1 werden wir die Abschätzung

$$\lambda_n(x) \geqq \frac{1}{\pi} |T_n(x)| \log n - c_1(x) \tag{8}$$

herleiten, wobei wir mit $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_6(x)$ nur von x abhängige positive Zahlen bezeichnen. Daraus folgt, daß die Folge $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x), \ldots$ in keinem Punkte x beschränkt ist[10], da sonst die Folge $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_n(x), \ldots$ gegen Null konvergieren würde. Nach einem Satz von HAHN[11]) ergibt sich also, daß es zu jedem Punkt x_0 im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ eine im selben Intervall stetige Funktion $f(x)$ gibt derart, daß die Interpolationsfolge (6) von $f(x)$ für $x = x_0$ divergiert und sogar nicht beschränkt ist. Durch die bereits erwähnten Methoden zur Verdichtung der Singularitäten kann man sogar für jede im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ gelegene abzählbare Punktmenge E eine für $-1 \leqq x \leqq +1$ stetige Funktion konstruieren, so daß die Folge (6) in jedem Punkte von E divergiert, bzw. unbeschränkt ist.

Wir werden nun in dieser Arbeit viel mehr beweisen, nämlich die oben erwähnte, auf das Vorhandensein einer Divergenzmenge von positivem Maß bezügliche, für die Fourierreihe einer stetigen Funktion ungelöste Frage bei der zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörigen Lagrangeschen Interpolation in positivem Sinne beantworten. Wir werden sogar den folgenden Satz beweisen:

I. *Es gibt eine im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ stetige Funktion $f(x)$, deren zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige Lagrangesche Interpolationsfolge im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ fast überall divergiert, ja sogar fast überall unbeschränkt ist.*

Die Funktion $f(x)$ werden wir bis auf eine unbekannte Konstante (von der nur die Existenz bewiesen wird) effektiv angeben. Wir werden nämlich zunächst folgenden Satz beweisen:

II. *Man kann zwei im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ stetige Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ angeben, so daß, für eine beliebige Stelle $x_0 \neq -1$ des Intervalls, entweder die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige Lagrangesche Interpolationsfolge von $g(x)$, oder*

---

[10]) Das gleiche habe ich auch für Interpolation an den Nullstellen der Jacobischen Polynome bewiesen.

[11]) H. HAHN, Über das Interpolationsproblem, *Math. Zeitschrift*, 1 (1918), S. 115—142.

die entsprechende Interpolationsfolge von $h(x)$ für $x = x_0$ eine unbeschränkte Zahlenfolge ist.

Aus diesem Satz werden wir dann Satz I herleiten, indem wir zeigen, daß es eine reelle Zahl λ gibt derart, daß $f(x) = g(x) + \lambda h(x)$ die im Satz I behauptete Beschaffenheit besitzt.

Zum Beweis des Satzes II benötigen wir anstatt (8) eine schärfere Ungleichung, die wir in § 2 beweisen werden. Diese Ungleichung bezieht sich auf die Summe, die aus (8) entsteht, indem man diejenigen „Grundfunktionen" $l_k(x)$ wegläßt, die zu Abszissen x_k gehören, welche bei einer äquidistanten Einteilung des Intervalls $-1 \leqq x \leqq +1$ im selben Intervall wie die Stelle x, oder in einem Intervall rechts davon liegen. (Der Einfachheit halber werde ich nur die Glieder mit ungeradem Index behalten, da diese konstantes Vorzeichen besitzen.) Die Abschätzung gilt nicht nur in n, sondern auch in der Anzahl m der Teilintervalle gleichmäßig; dieser Umstand bewirkt es, daß wir einen Divergenzsatz für *sämtliche* Stellen des Intervalls $(-1, +1)$ erhalten. Daß wir statt einer Funktion zwei Funktionen $g(x)$, $h(x)$ auf einmal zu betrachten haben, kommt davon, daß in der erwähnten Ungleichung (ebenso wie in (8)) der Faktor $|T_n(x)|$ auftritt, und dieser wird für gewisse x und n klein.

In § 3 beweisen wir einige weitere Hilfssätze; die Konstruktion von $g(x)$ und $h(x)$ und der Beweis der Sätze I und II bildet den Inhalt von § 4.

§ 1. Untere Abschätzung der Summe der absoluten Beträge der Grundfunktionen.

Wir betrachten zunächst die Summe (7) an einer Stelle x mit $x_n < x \leqq 1$, die von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschieden ist. Es sei ν der kleinste Index mit $x_\nu < x$; da $\sin\vartheta_k$ für jedes k und $x - x_k = x - \cos\vartheta_k$ für $k \geqq \nu$ positiv ist, so folgt aus (4) für $k = \nu$, $\nu + 1, \ldots, n$

$$|l_k(x)| = \frac{|T_n(x)|}{n} \frac{\sin\vartheta_k}{x - \cos\vartheta_k},$$

also

$$\lambda_n(x) \geqq \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{k=\nu}^{n} \frac{\sin\vartheta_k}{x - \cos\vartheta_k}. \tag{9}$$

Nun is aber, wie man aus

$$(x-\cos\vartheta)^2\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\sin\vartheta}{x-\cos\vartheta}\right)=\cos\vartheta(x-\cos\vartheta)-\sin^2\vartheta=$$
$$=x\cos\vartheta-1\leqq 0$$

entnimmt, $\frac{\sin\vartheta}{x-\cos\vartheta}$ eine abnehmende Funktion von ϑ; also ist

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=\nu}^{n}\frac{\sin\vartheta_k}{x-\cos\vartheta_k}\geqq\int_{\vartheta_\nu}^{\pi}\frac{\sin\vartheta}{x-\cos\vartheta}d\vartheta=$$
$$=\log(x+1)-\log(x-\cos\vartheta_\nu)\geqq$$
$$\geqq\log\frac{1}{x-\cos\vartheta_\nu}-|\log(x+1)|=\log\frac{1}{x-x_\nu}-c_2(x).$$

Hier ist aber, falls $\nu>1$, $0<x-x_\nu<x_{\nu-1}-x_\nu<\vartheta_\nu-\vartheta_{\nu-1}=\frac{\pi}{n}$ (da für $\pi\geqq\alpha>\beta\geqq 0$ die Ungleichung $\cos\beta-\cos\alpha<\alpha-\beta$ besteht, wie z. B. aus der geometrischen Bedeutung des Kosinus hervorgeht); das gleiche gilt auch für $\nu=1$, da dann $x-x_\nu\leqq\leqq 1-x_1\leqq\vartheta_1-0<\frac{\pi}{n}$. (In diesem Falle könnte man auch eine viel schärfere Ungleichung beweisen.) Also gilt wegen (9) und $|T_n(x)|\leqq 1$

$$\lambda_n(x)\geqq\frac{1}{\pi}|T_n(x)|\left(\log\frac{n}{\pi}-c_2(x)\right)\geqq\frac{1}{\pi}|T_n(x)|\log n-c_1(x),$$

d. h. Ungleichung (8) mit $c_1(x)=\frac{1}{\pi}(c_2(x)+\log\pi)$. Diese Ungleichung gilt offenbar auch für $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nun sei $-1\leqq x<x_n\leqq 0$; dann ist

$$|l_k(x)|=\frac{|T_n(x)|}{n}\frac{\sin\vartheta_k}{\cos\vartheta_k-x},$$

$$\lambda_n(x)=\frac{|T_n(x)|}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\vartheta_k}{\cos\vartheta_k-x};$$

da $\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta-x}$ eine wachsende Funktion von ϑ ist, so gilt

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\vartheta_k}{\cos\vartheta_k-x}\geqq\int_0^{\vartheta_n}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta-x}d\vartheta=\log(1-x)-\log(\cos\vartheta_n-x)\geqq$$
$$\geqq\log\frac{1}{\cos\vartheta_n-x}=\log\frac{1}{x_n-x}\geqq\log\frac{1}{x_n+1}\geqq\log\frac{n}{\pi}$$

wegen $x_n - x \leqq x_n + 1 \leqq \pi - \vartheta_n < \frac{\pi}{n}$; d. h. die Ungleichung (8) gilt auch jetzt

Herr SZEGÖ hat mir freundlicherweise mitgeteilt, daß man (8) auch ohne Integralabschätzung, durch Vergleich mit der harmonischen Reihe, beweisen kann.

§ 2. Untere Abschätzung der Summe geeigneter Grundfunktionen.

Es sei $-1 < x \leqq +1$; zerlegen wir das Intervall $-1 < x \leqq +1$ in m gleiche Teile und rechnen wir jedem Teil den rechten Endpunkt hinzu, den linken aber nicht. Es sei x im $(\mu+1)$-ten Teilintervall enthalten (von links gerechnet; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$). Wir betrachten diejenigen ungeraden Werte von k, für welche x_k im ersten, zweiten, ..., oder μ-ten Teilintervall liegt. Wir nehmen an, daß es solche Werte von k gibt; dazu genügt es, daß x_n und x_{n-1} zum ersten Teilintervall gehören, x aber nicht; also, daß

$$1 + x_{n-1} \leqq \frac{2}{m} < 1 + x;$$

wegen $1 + x_{n-1} = \cos\vartheta_{n-1} - \cos\pi \leqq \pi - \vartheta_{n-1} < \frac{6}{n}$ genügt es also, wenn m die Ungleichung

$$\frac{2}{1+x} < m \leqq \frac{n}{3}$$

erfüllt, was wir voraussetzen werden.

Es sei also $2\nu+1$ der kleinste ungerade Index, für welchen $x_{2\nu+1}$ in einem der ersten μ Teilintervallen liegt und betrachten wir die Summe

$$\lambda_n(x; m) = \sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |l_{2k+1}(x)|.$$

Da wegen (4)

$$l_{2k+1}(x) = \frac{\sin\vartheta_{2k+1}}{n} \frac{T_n(x)}{x - x_{2k+1}}$$

für die betrachteten Werte von k dasselbe Vorzeichen wie $T_n(x)$ besitzt, ist zugleich

$$(10) \qquad \lambda_n(x; m) = \left| \sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{\sin\vartheta_{2k+1}}{x - \cos\vartheta_{2k+1}} \frac{T_n(x)}{n} \right| = \left| \sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} l_{2k+1}(x) \right|.$$

Durch dieselbe Abschätzungsmethode, wie im vorigen Paragraphen, erhalten wir

$$\lambda_n(x;m)=\frac{|T_n(x)|}{n}\sum_{k=\nu}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{\sin\vartheta_{2k+1}}{x-\cos\vartheta_{2k+1}}\geqq\frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\int\limits_{\vartheta_{2\nu+1}}^{\pi}\frac{\sin\vartheta}{x-\cos\vartheta}d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\left(\log\frac{1}{x-x_{2\nu+1}}-c_2(x)\right);$$

nun ist aber $\nu>0$ (da x_1 wegen $1-x_1<\vartheta_1=\frac{\pi}{2n}<\frac{6}{n}\leqq\frac{2}{m}$ gewiß im letzten Teilintervall liegt), also

$$0<x-x_{2\nu+1}=(x-x_{2\nu-1})+(x_{2\nu-1}-x_{2\nu+1})<$$

$$<\frac{2}{m}+\vartheta_{2\nu+1}-\vartheta_{2\nu-1}=\frac{2}{m}+\frac{2\pi}{n}<\frac{2}{m}+\frac{9}{n}\leqq\frac{5}{m};$$

daher gewinnt man wegen $|T_n(x)|\leqq 1$

$$\lambda_n(x;m)\geqq\frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\left(\log\frac{m}{5}-c_2(x)\right)\geqq\frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\log m-c_3(x).$$

Wählt man $c_3(x)\geqq\frac{1}{2\pi}(c_2(x)+\log 5)$ so, daß $c_3(x)\geqq\frac{1}{2\pi}\log\frac{2}{1+x}$ ausfalle, so gilt diese Ungleichung auch für $m\leqq\frac{2}{1+x}$, falls dann unter $\lambda_n(x;m)$ Null zu verstehen ist; also gilt für $-1<x\leqq+1$, $m\leqq\frac{n}{3}$

$$\lambda_n(x;m)\geqq\frac{1}{2\pi}|T_n(x)|\log m-c_3(x). \tag{11}$$

Diese Ungleichung ist unser Haupthilfsmittel beim Divergenzbeweise.

§ 3. Weitere Hilfssätze über Tschebyscheffsche Abszissen.

Eine Tschebyscheffsche Abszisse n-ter Ordnung, d. h. eine Nullstelle von $T_n(x)$, ist zugleich eine Tschebyscheffsche Abszisse $3n$-ter, $5n$-ter, ..., $(2\nu+1)n$-ter, ... Ordnung. In der Tat ist

$$\cos\frac{2k-1}{2n}\pi=\cos\frac{(2k-1)(2\nu+1)}{2(2\nu+1)n}\pi=\cos\frac{2k'-1}{2(2\nu+1)n}\pi$$

mit

$$k'=(2\nu+1)k-\nu,$$

und für $1 \leqq k \leqq n$ ist

$$1 \leqq \nu + 1 = (2\nu + 1) - \nu \leqq k' \leqq (2\nu + 1)n - \nu \leqq (2\nu + 1)n.$$

Daraus ergibt sich sogleich der

Hilfssatz 1. *Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ Tschebyscheffsche Abszissen und zwar bzw. n_1-ter, n_2-ter, ..., n_r-ter Ordnung, wobei $n_1, n_2, \ldots, n_r$ entweder sämtlich ungerade, oder sämtlich gerade aber nicht durch 4 teilbar sind*[12]*). Es sei n die kleinste gemeinsame Vielfache von $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Dann sind $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ sämtlich Tschebyscheffsche Abszissen n-ter Ordnung.*

In der Tat, n ist offenbar eine ungerade vielfache sowohl von n_1, wie auch von $n_2, n_3, \ldots, n_r$.

Hilfssatz 2. *Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ verschiedene Zahlen und zwar sei ξ_s eine Tschebyscheffsche Abszisse n_s-ter Ordnung $(s = 1, 2, \ldots, r)$, wo $n_1, n_2, \ldots, n_r$ entweder sämtlich ungerade, oder sämtlich gerade aber nicht durch 4 teilbar sind. Es sei n die kleinste gemeinsame Vielfache von $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Es seien ferner $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ beliebige Zahlen mit $0 \leqq \eta_s \leqq 1$ für $s = 1, 2, \ldots, r$. Dann gibt es ein Polynom $P(x)$ von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, welches für $-1 \leqq x \leqq +1$ der Ungleichung $0 \leqq P(x) \leqq 1$, ferner den Interpolationsbedingungen $P(\xi_1) = \eta_1, P(\xi_2) = \eta_2, \ldots, P(\xi_r) = \eta_r$ genügt.*

In der Tat, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ sind laut Hilfssatz 1 Tschebyscheffsche Abszissen n-ter Ordnung. Es seien $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n$ die übrigen Tschebyscheffschen Abszissen n-ter Ordnung und es sei $\eta_{r+1} = \eta_{r+2} = \ldots = \eta_n = 0$. Dann genügt für $-1 \leqq x \leqq 1$ die durch die Bedingungen

$$(12) \qquad P(\xi_1) = \eta_1, \; P(\xi_2) = \eta_2, \ldots, P(\xi_n) = \eta_n$$

bestimmte Fejérsche Treppenparabel, d. h. dasjenige Polynom von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, welches die Bedingungen (12), ferner die Bedingungen

$$P'(\xi_1) = P'(\xi_2) = \ldots = P'(\xi_n) = 0$$

erfüllt, laut einem Satze von FEJÉR[13]) auch der Ungleichung $0 \leqq P(x) \leqq 1$; also gilt für $P(x)$ die Behauptung des Hilfssatzes 2.

---

[12]) Offenbar gilt die Behauptung allgemein, wenn $n_1, n_2, \ldots, n_r$ den gleichen Paritätsgrad haben; daher gilt dasselbe auch für Hilfssatz 2.

[13]) L. FEJÉR, Über Interpolation, *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1916, S. 66—91, insbesondere Theorem III, S. 73.

Hilfssatz 3. *Es seien n und n' teilerfremde ungerade Zahlen. Ist ξ eine Tschebyscheffsche Abszisse zugleich von n-ter und n'-ter Ordnung, so ist $\xi = 0$. Ist ξ eine Tschebyscheffsche Abszisse zugleich von $2n$-ter und $2n'$-ter Ordnung, so ist entweder $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oder $\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.*[14]

In der Tat ist im ersten Falle (wegen (2))

$$\xi = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi = \cos \frac{2k'-1}{2n'}\pi$$
$$(1 \leqq k \leqq n;\ 1 \leqq k' \leqq n'),$$

also ist

$$\frac{2k-1}{2n} = \frac{2k'-1}{2n'}$$

ein echter Bruch; auf reduzierte Form gebracht ist sein Nenner ein gemeinsamer Teiler von $2n$ und $2n'$; daher ist der Bruch gleich $\frac{1}{2}$, also

$$\xi = \cos \frac{1}{2}\pi = 0.$$

Im zweiten Falle ist

$$\xi = \cos \frac{2k-1}{4n}\pi = \cos \frac{2k'-1}{4n'}\pi$$
$$(1 \leqq k \leqq 2n;\ 1 \leqq k' \leqq 2n'),$$

also ist

$$\frac{2k-1}{4n} = \frac{2k'-1}{4n'}$$

wiederum ein echter Bruch mit einem Nenner, der gemeinsamer Teiler von $4n$ und $4n'$ ist und offenbar nicht 2 sein kann; daher ist der Nenner 4, der Bruch selbst $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$, also

$$\xi = \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad \xi = \cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

[14]) Hilfssatz 3 ist im bekannten Tatsache enthalten: *haben n und n' die gleiche Paritätsgrad, so ist eine gemeinsame Nullstelle von $T_n(x)$ und $T_{n'}(x)$ zugleich eine Nullstelle von $T_d(x)$, wobei d den größten gemeinsamen Teiler von n und n' bedeutet.*

§ 4. Konstruktion von stetigen Funktionen mit divergierender Interpolationsfolge.

Es sei σ_n das Maximum der durch (7) definierten (stetigen) Funktion $\lambda_n(x)$ für $-1 \leqq x \leqq 1$ und $\varrho(n)$ der größte unter den Werten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Dann ist offenbar $\varrho(1) \leqq \varrho(2) \leqq \ldots \leqq \varrho(n)$; ferner ist, wegen $\lambda_n(x_k^{(n)}) = 1$, $\varrho(n) \geqq \sigma_n \geqq 1$. Für eine beliebige Funktion $f(x)$, die für $-1 \leqq x \leqq 1$ der Ungleichung $-1 \leqq f(x) \leqq 1$ genügt, gilt wegen (5) für $\nu \leqq n$ und $-1 \leqq x \leqq 1$

$$|L_\nu[f(x)]| \leqq \sum_{k=1}^{\nu} |l_k^{(\nu)}(x)| = \lambda_\nu(x) \leqq \sigma_\nu \leqq \varrho(n).$$

Es sei nun $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ die (wachsend geordnete) Folge der Primzahlen von 5 an, d. h. $p_1 = 5, p_2 = 7, p_3 = 11, \ldots$ Wegen $p_1 > 3, p_2 > 6$ und $p_{r+2} > p_r + 6$ gilt allgemein[15]) $p_r > 3r$. Es sei ferner $m_1, m_2, \ldots, m_r, \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen, die für $r \geqq 2$ die Ungleichungen

$$\log m_r > 4^r \varrho(2p_{2m_{r-1}}) \tag{13}$$

und

$$p_{m_r} \geqq 4 p_1 p_2 \ldots p_{2m_{r-1}} \tag{14}$$

erfüllen. Die Existenz einer solchen Folge ist klar; in der Tat, es sei etwa $m_1 = 1$ und, falls m_{r-1} bereits bekannt ist, m_r die kleinste ganze Zahl, die den (offenbar für genügend große m_r gültigen) Ungleichungen (13) und (14) genügt. Ersichtlich ist $m_1 < m_2 < \ldots < m_r < \ldots$, sogar $m_r > 2m_{r-1}$.

Wir definieren nun zwei Polynomfolgen $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_r(x), \ldots$ und $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_r(x), \ldots$ wie folgt. Wir teilen das Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ in m_r gleiche Teile (der rechte Endpunkt wird jedesmal dem Teilintervall zugerechnet, der linke aber nicht). Wir nennen *Abszissen erster Art* diejenigen Nullstellen von ungeradem Index des Tschebyscheffschen Polynoms p_{m_r+1}-ten Ordnung, die im ersten Teilintervall (von links) liegen, ferner diejenigen Nullstellen von ungeradem Index des Tschebyscheffschen Polynoms p_{m_r+2}-ter Ordnung, die im ersten oder zweiten Teilintervall

[15]) Die Ungleichung $p_{r+2} \geqq p_r + 6$ folgt daraus, daß von den sechs konsekutiven Zahlen $p_r, p_r+1, p_r+2, p_r+3, p_r+4, p_r+5$ höchstens zwei Primzahlen sein können. Statt der Primzahlen könnte $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ eine beliebige wachsende Folge von je zwei teilerfremden ungeraden Zahlen sein, für die die Ungleichung $p_r > 3r$ gilt.

liegen usw., allgemein diejenigen Nullstellen von ungeradem Index $p_{m_r+\mu}$-ter Ordnung, die im ersten, zweiten, ..., oder μ-ten Teilintervall liegen ($\mu = 1, 2, \ldots, m_r$), aber jedesmal die etwaige Nullstelle 0 ausgenommen. Alle übrigen Nullstellen der Tschebyscheffschen Polynome p_{m_r}-ter, p_{m_r+1}-ter, p_{m_r+2}-ter, ..., p_{2m_r}-ter Ordnung, darunter auch 0, sollen *Abszissen zweiter Art* heißen. Laut Hilfssatz 3 sind die Abszissen erster Art von den Abszissen zweiter Art verschieden; also können wir laut Hilfssatz 2 ein Polynom $P_r(x)$ bestimmen, welches für $-1 \leqq x \leqq 1$ der Ungleichung $0 \leqq P_r(x) \leqq 1$ genügt, an den Abszissen erster Art den Wert 1, an den Abszissen zweiter Art den Wert 0 annimmt und dessen Grad (wegen (14)) höchstens

$$2p_{m_r} p_{m_r+1} \ldots p_{2m_r} - 1 < p_{m_{r+1}}$$

beträgt. Analog nennen wir *Abszissen dritter Art* diejenigen Nullstellen von ungeradem Index des Tschebyscheffschen Polynoms $2p_{m_r+\mu}$-ter Ordnung, die im ersten, und zweiten, ..., oder μ-ten Teilintervall liegen ($\mu = 1, 2, \ldots, m_r$), die etwaiger Nullstellen $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ jedesmal ausgenommen; alle übrigen Nullstellen der Tschebyscheffschen Polynome $2p_{m_r}$-ter, $2p_{m_r+1}$-ter, $2p_{m_r+2}$-ter, ..., $2p_{2m_r}$-ter Ordnung, darunter auch $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, heißen *Abszissen vierter Art*. Die Abszissen dritter Art sind laut Hilfssatz 3 von den Abszissen vierter Art verschieden; also können wir laut Hilfssatz 2 das Polynom $Q_r(x)$ derart bestimmen, daß es für $-1 \leqq x \leqq 1$ der Ungleichung $0 \leqq Q_r(x) \leqq 1$ genügt, an den Abszissen dritter Art den Wert 1, an den Abszissen vierter Art den Wert 0 annimmt und sein Grad höchstens gleich

$$4p_{m_r} p_{m_r+1} \ldots p_{2m_r} - 1 < p_{m_{r+1}}$$

ausfällt. Setzen wir

$$(15) \qquad \tau_1 = 1, \quad \tau_r = \varrho(2p_{2m_{r-1}}) \quad \text{für} \quad r = 2, 3, \ldots$$

und bilden wir die beiden Reihen

$$(16) \qquad g(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{P_r(x)}{2^r \tau_r}, \qquad h(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Q_r(x)}{2^r \tau_r}.$$

Wegen $0 \leqq P_r(x) \leqq 1$, $0 \leqq Q_r(x) \leqq 1$ sind für $-1 \leqq x \leqq 1$ beide Reihen gleichmäßig konvergent, die Funktionen $g(x)$, $h(x)$ stetig im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ und es gilt

$$0 \leqq g(x) \leqq 1, \quad 0 \leqq h(x) \leqq 1.$$

Betrachten wir nun die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörigen Interpolationsfolgen

$$L_1[g(x)],\ L_2[g(x)], \ldots, L_n[g(x)], \ldots, \tag{17}$$

$$L_1[h(x)],\ L_2[h(x)], \ldots, L_n[h(x)], \ldots \tag{18}$$

von $g(x)$ bzw. $h(x)$. Es sei x eine beliebige feste Zahl mit $-1 < x \leqq 1$. Wir zeigen, daß *eine der Folgen* (17), (18) *divergent, ja sogar unbeschränkt ist.*

Teilen wir das Intervall $(-1, +1)$ in m_r gleiche Teile (die Teilpunkte sollen jedesmal dem von ihnen links gelegenen Teilintervall zugezählt werden); es sei x im $(\mu_r + 1)$-ten Teilintervall enthalten $(\mu_r = 0, 1, 2, \ldots, m_r - 1)$ und es sei $n_r = p_{m_r + \mu_r}$ So erhalten wir eine (natürlich von x abhängige) Folge $n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots$ von natürlichen Zahlen. Wir betrachten die Teilfolgen

$$L_{n_1}[g(x)],\ L_{n_2}[g(x)], \ldots, L_{n_r}[g(x)], \ldots$$

bzw.

$$L_{2n_1}[h(x)],\ L_{2n_2}[h(x)], \ldots, L_{2n_r}[h(x)], \ldots$$

von (17) bzw. (18).

Es ist wegen (5) und (16)

$$L_{n_r}[g(x)] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{n_r}[P_s(x)] = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \tag{19}$$

$$L_{2n_r}[h(x)] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{2n_r}[Q_s(x)] = \Sigma_1' + \Sigma_2' + \Sigma_3', \tag{20}$$

wobei

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{n_r}[P_s(x)], \qquad \Sigma_1' = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{2n_r}[Q_s(x)],$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2^r \tau_r} L_{n_r}[P_r(x)], \qquad \Sigma_2' = \frac{1}{2^r \tau_r} L_{2n_r}[Q_r(x)],$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{n_r}[P_s(x)], \quad \Sigma_3' = \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^s \tau_s} L_{2n_r}[Q_s(x)].$$

Nach Konstruktion sind aber für $s = 1, 2, \ldots, r-1$ die Polynome $P_s(x)$, $Q_s(x)$ von höchstens $p_{m_{s+1}} \leqq p_{m_r} \leqq n_r$-tem Grade; daher ist

$$L_{n_r}[P_s(x)] = P_s(x), \quad L_{2n_r}[Q_s(x)] = Q_s(x),$$

und also

(21) $0 \leqq \Sigma_1 = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{P_s(x)}{2^s \tau_s} \leqq g(x) \leqq 1, \quad 0 \leqq \Sigma_1' = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{Q_s(x)}{2^s \tau_s} \leqq h(x) \leqq 1.$

Andererseits ist für $s \geqq r+1$ wegen $n_r < 2n_r < 2p_{2m_r} \leqq 2p_{2m_{s-1}}$ und (15)

$$|L_{n_r}[P_s(x)]| \leqq \varrho(2p_{2m_{s-1}}) = \tau_s, \quad |L_{2n_r}[Q_s(x)]| \leqq \varrho(2p_{2m_{s-1}}) = \tau_s,$$

also

$$|\Sigma_3|, |\Sigma_3'| \leqq \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^s} < 1. \tag{22}$$

Endlich ist wegen (5)

$$L_{n_r}[P_r(x)] = \sum_{k=1}^{n_r} l_k^{(n_r)}(x) \, P_r(x_k^{(n_r)}),$$

$$L_{2n_r}[Q_r(x)] = \sum_{k=1}^{2n_r} l_k^{(2n_r)}(x) \, Q_r(x_k^{(2n_r)}).$$

Nach Konstruktion von $P_r(x)$, $Q_r(x)$ ist aber $P_r(x_k^{(n_r)}) = 1$ oder 0 und $Q_r(x_k^{(2n_r)}) = 1$ oder 0, je nachdem $x_k^{(n_r)}$ eine Abszisse erster oder zweiter Art, bzw. $x_k^{(2n_r)}$ eine Abszisse dritter oder vierter Art ist; also ist $L_{n_r}[P_r(x)]$ bzw. $L_{2n_r}[Q_r(x)]$, abgesehen eventuell von einem bzw. zwei $\left(\text{zu } x_k^{(n_r)} = 0 \text{ bzw. } x_k^{(2n_r)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ gehörigen}\right)$ Glieder gleich einem Summe, deren absoluter Betrag nach (10) durch $\lambda_{n_r}(x; m_r)$ bzw. $\lambda_{2n_r}(x; m_r)$ angegeben und wegen $m_r < \frac{p_{m_r}}{3} \leqq \leqq \frac{n_r}{3} < \frac{2n_r}{3}$ durch (11) abgeschätzt wird (man beachte, daß im Falle $\mu_r = 1$ $\lambda_{n_r}(x; m_r) = \lambda_{2n_r}(x; m_r) = 0$ definiert wurde). Da aber nach einem Satze von Fejér[16]) für jedes k und n

$$|l_k^{(n)}(x)| < \sqrt{2}$$

besteht, so ist

$$|L_{n_r}[P_r(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_r}(x)| \log m_r - c_3(x) - \sqrt{2},$$

$$|L_{2n_r}[Q_r(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{2n_r}(x)| \log m_r - c_3(x) - 2\sqrt{2},$$

---

16) L. Fejér, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen*, **106** (1932), S. 1—55, insb. Formel (28).

also wegen (13), (15) und $2^r \tau_r \geqq 1$

$$|\Sigma_2| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_r}(x)| 2^r - c_4(x),$$

$$|\Sigma_2'| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{2n_r}(x)| 2^r - c_4(x)$$

und endlich wegen (19), (20), (21), (22)

$$|L_{n_r}[g(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{n_r}(x)| 2^r - c_5(x),$$

$$|L_{2n_r}[h(x)]| \geqq \frac{1}{2\pi} |T_{2n_r}(x)| 2^r - c_5(x).$$

Wären nun beiden Folgen (17) und (18) beschränkt, so würde hieraus

$$T_{n_r}(x) \to 0, \quad T_{2n_r}(x) \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

folgen, was wegen (3)

$$\cos(n_r \arccos x) \to 0$$

und

$$\cos(2n_r \arccos x) = 2\cos^2(n_r \arccos x) - 1 \to 0$$

bedeuten würde, was ersichtlich unmöglich ist. Somit haben wir die den Folgen (17), (18) bezügliche Behauptung und damit den in der Einleitung ausgesprochenen Satz II bewiesen.

Um Satz I zu beweisen, betrachten wir für jedes reelle λ die zu den Tschebyscheffschen Abszissen gehörige Interpolationsfolge der Funktion $f_\lambda(x) = g(x) + \lambda h(x)$. Es sei E_λ die (Borelsche, also meßbare) Menge derjenigen Punkte x, $-1 \leqq x \leqq 1$, für welche diese Interpolationsfolge beschränkt ist. Für $\lambda \neq \mu$ sind die Mengen E_λ und E_μ fremd; in der Tat, würde x_0 ein gemeinsamer Punkt von E_λ und E_μ sein, so würde im Punkte x_0 sowohl die Interpolationsfolge von $f_\lambda(x)$, wie auch die von $f_\mu(x)$ beschränkt sein, also auch die Interpolationsfolgen der Funktionen

$$g(x) = \frac{\lambda f_\mu(x) - \mu f_\lambda(x)}{\lambda - \mu}, \qquad h(x) = \frac{f_\lambda(x) - f_\mu(x)}{\lambda - \mu},$$

die sich aus den Interpolationsfolgen von $f_\lambda(x)$ und $f_\mu(x)$ linear zusammensetzen; dies würde aber dem Satz II widersprechen. Also gibt es höchstens abzählbar viele Mengen E_λ von positivem Maß, und so gibt es einen Wert von λ, für den E_λ eine Nullmenge ist. Damit ist auch Satz I bewiesen.

(Eingegangen am 20. Februar 1935.)